

# Gemeinsame Zustands- und Schaltsignalbeobachtbarkeit

Stephan Trenn

AG Technomathematik, TU Kaiserslautern

gemeinsame Arbeit mit **F. Küsters** (Fraunhofer ITWM, Kaiserslautern)

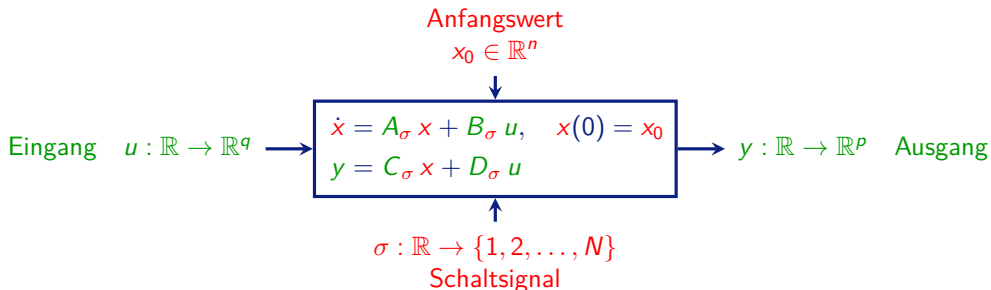
Treffen des GAMM-Fachausschuss „Dynamik und Regelungstheorie“

Anif, 21.09.2016, 17:20–17:45





# Generelle Fragestellungen



## Fragestellungen

- Lässt sich Zustand und Schaltsignal eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen?  
→  $(x, \sigma)$ -Beobachtbarkeit
- Lässt sich Schaltsignal eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen?  
→  $\sigma$ -Beobachtbarkeit
- Lassen sich Schaltzeiten eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen?  
→  $t_S$ -Beobachtbarkeit

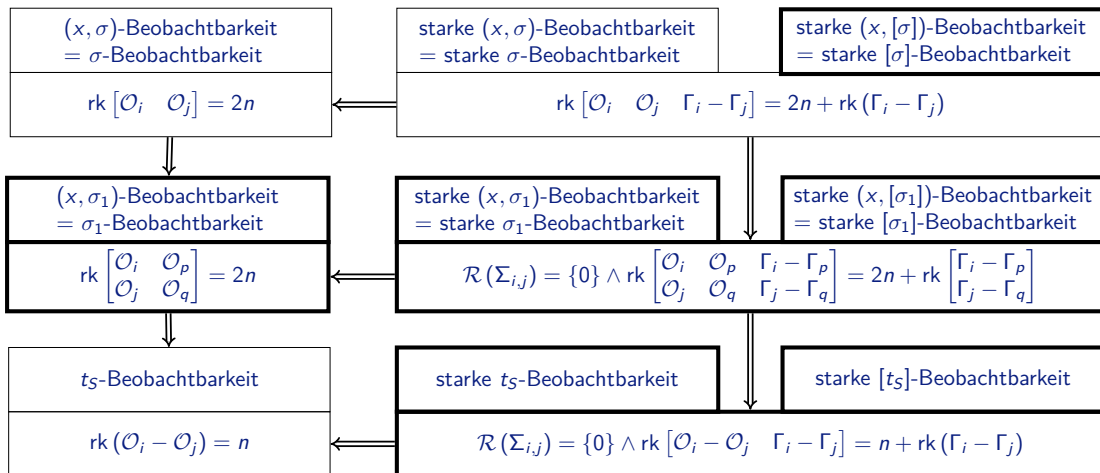
# Beobachtbarkeits-Charakterisierungen Übersicht



$u = 0$

$u$  analytisch  $\wedge$  (A2)

Äquivalenzklassen für  $\sigma$ ,  
 $u$  glatt





# $(x, \sigma)$ -Beobachtbarkeit für $u = 0$

## Lemma (Vidal et al. 2003)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x \\ y &= C_\sigma x \end{aligned} \quad \text{ist } (x, \sigma)\text{-beobachtbar}$$



$$\text{rk} \begin{bmatrix} \mathcal{O}_i^{[2n]} & \mathcal{O}_j^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n \quad \forall i \neq j, \quad \text{wobei } \mathcal{O}_i^{[2n]} = \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{2n-1} \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_j \end{bmatrix} \xi \\ y &= [C_i \quad -C_j] \xi \end{aligned} \quad \text{ist beobachtbar } \forall i \neq j$$

## Schlussfolgerung

$(x, \sigma)$ -Beobachtbarkeit kann auf Unterscheidbarkeit **konstanter Schaltsignale** sowie **klassische Beobachtbarkeit** jeder einzelner Moden  $(A_i, C_i)$  zurückgeführt werden



# Schwächerer Beobachtbarkeitsbegriff

## Problem

Annahme, dass jeder Mode beobachtbar → Für Fehlererkennungsszenarien ungeeignet

## Beispiel

Normaler Betrieb

$$t < t_1$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = [1 \ 0] x$$

Fehler

$$t \geq t_1$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = [1 \ 0] x$$

## Neue Definition

Geschaltetes System heißt  $(x, \sigma_1)$ -beobachtbar  $:\Leftrightarrow$  Zustand and Schaltsignal lassen sich eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen, sofern  $\sigma$  nicht konstant ist.

# Charakterisierung $(x, \sigma_1)$ -Beobachtbarkeit



## Theorem (Küsters & T. 2016)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x \\ y &= C_\sigma x \end{aligned} \quad \text{ist } (x, \sigma_1)\text{-beobachtbar}$$



$$\text{rk} \begin{bmatrix} O_i^{[2n]} & O_p^{[2n]} \\ O_j^{[2n]} & O_q^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n \quad \forall i \neq j, p \neq q, (i, j) \neq (p, q)$$

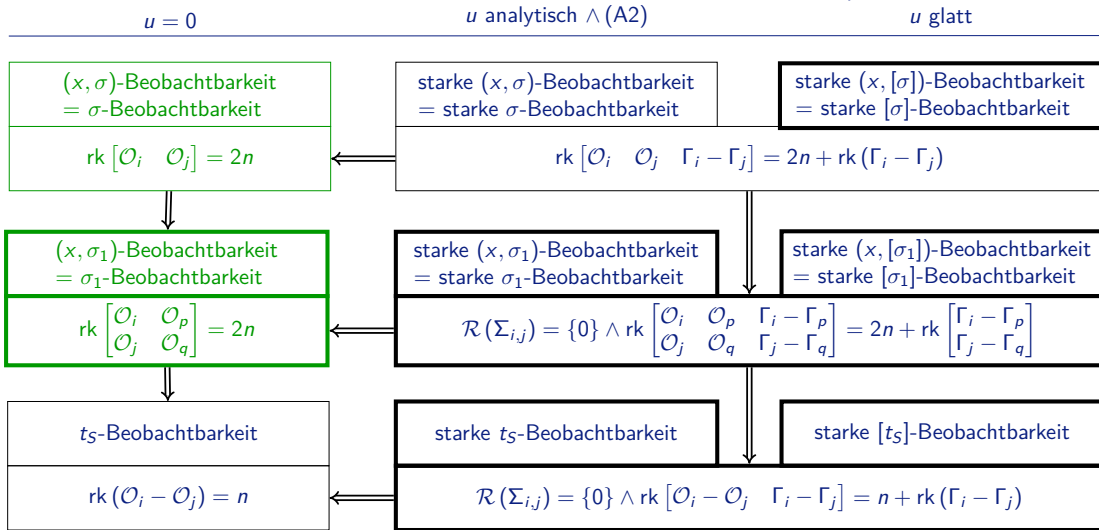
## Angemessenere Bedingung

Beobachtbarkeit der individuellen Moden  $(A_i, C_i)$  wird nicht mehr benötigt!



# Beobachtbarkeits-Charakterisierungen Übersicht

Äquivalenzklassen für  $\sigma$ ,  
 $u$  glatt





# Inhomogener Fall: Viele mögliche Definitionen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned} \quad \text{ist } * \text{-beobachtbar für } \left\{ \begin{array}{l} \text{ein } u \in \mathcal{U} \\ \text{fast alle } u \in \mathcal{U} \\ \text{alle } u \in \mathcal{U} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{schwach } * \text{-beobachtbar} \\ \\ \rightarrow \text{stark } * \text{-beobachtbar} \end{array}$$

wobei  $* \in \{ (x, \sigma), \sigma, (x, \sigma_1), \sigma_1, t_S \}$  und

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{l} \text{lokal integrierbare Eingänge} \\ \text{glatte Eingänge} \\ \text{analytische Eingänge} \end{array} \right.$$

Zusätzliche Bedingung (A2) an  $B_i, D_i$





# Inhomogener Fall: Viele mögliche Definitionen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned} \quad \text{ist } * \text{-beobachtbar für } \left. \begin{array}{l} \text{ein } u \in \mathcal{U} \\ \text{fast alle } u \in \mathcal{U} \\ \text{alle } u \in \mathcal{U} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{schwach } * \text{-beobachtbar} \\ \rightarrow \text{stark } * \text{-beobachtbar} \end{array}$$

wobei  $* \in \{ (x, [\sigma]), [\sigma], (x, [\sigma_1]), [\sigma_1], [t_s] \}$  und

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{l} \text{lokal integrierbare Eingänge} \\ \text{glatte Eingänge} \\ \text{analytische Eingänge} \end{array} \right.$$

Betrachtung von Äquivalenzklassen von Schaltsignalen



# Starke $(x, \sigma)$ -Beobachtbarkeit

## Annahmen

(A1)  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$  **analytisch** (insbesondere  $u \equiv 0$  auf Intervall  $\implies u \equiv 0$  überall)

(A2)  $\ker \begin{bmatrix} B_i \\ B_j \\ D_i - D_j \end{bmatrix} = \{0\}$  für alle  $i \neq j$

## Theorem (cf. Lou & Sin 2009)

$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma u$   
 $y = C_\sigma x + D_\sigma u$  mit (A1) und (A2) ist stark  $(x, \sigma)$ -beobachtbar

$\iff$

$$\text{rk} \begin{bmatrix} O_i^{[2n]} & O_j^{[2n]} & \Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n + \text{rk}(\Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]}) \quad \forall i \neq j \quad \text{wobei } \Gamma_i^{[2n]} = \begin{bmatrix} D & & & \\ CB & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ CA^{2n-2}B & \dots & CB & D \end{bmatrix}$$

Beobachtbarkeit von  $(A_i, C_i)$  ist **notwendig** für starke  $(x, \sigma)$ -Beobachtbarkeit



# Äquivalente Schaltsignale und starke $(x, [\sigma])$ -Beobachtbarkeit

## Definition (cf. Kaba 2014)

Für  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{U}$  ist  $\sigma \stackrel{x_0, u}{\sim} \bar{\sigma} : \Leftrightarrow$

- ①  $x(\cdot; x_0, u, \sigma) = x(\cdot; x_0, u, \bar{\sigma})$
- ②  $y(\cdot; x_0, u, \sigma) = y(\cdot; x_0, u, \bar{\sigma})$
- ③ Für jedes Intervall  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  gilt:  $x(t; x_0, u, \sigma) \neq 0 \forall t \in \mathcal{I} \implies \sigma(t) = \bar{\sigma}(t) \forall t \in \mathcal{I}$

Mit entsprechender Äquivalenzklasse  $[\sigma_{(x_0, u)}]$

## Theorem (Küsters & T. 2016)

$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma u$   
 $y = C_\sigma x + D_\sigma u$

mit glattem  $u$  ist stark  $(x, [\sigma])$ -beobachtbar

$\Leftrightarrow$

$$\text{rk} \begin{bmatrix} O_i^{[2n]} & O_j^{[2n]} & \Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n + \text{rk}(\Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]}) \quad \forall i \neq j$$



# Verbindung zur starken Beobachtbarkeit bei LTIs

Analog zum homogenen Fall betrachte

$$\Sigma_{i,j} : \begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_j \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} B_i \\ B_j \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_i & -C_j \end{bmatrix} \xi + (D_i - D_j)u \end{aligned}$$

## Bemerkung

$$\text{rk} \begin{bmatrix} \mathcal{O}_i^{[2n]} & \mathcal{O}_j^{[2n]} & \Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n + \text{rk}(\Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]})$$
$$\iff$$

$\Sigma_{i,j}$  ist stark beobachtbar, d.h.  $x$  kann nur durch  $y$  bestimmt werden (ohne Kenntnis von  $u$ )

## Definition (Kontrollierbare schwach-unbeobachtbare Zustände, Trentelmann et al. 2001)

$$\mathcal{R}(\Sigma_{i,j}) = \left\{ \xi_0 \in \mathbb{R}^{2n} \mid \exists u(\cdot), \exists T > 0 : \xi(T; \xi_0, u) = 0, y(\cdot; \xi_0, u) \equiv 0 \right\}$$



# Beobachtbarkeits-Charakterisierungen Übersicht

Äquivalenzklassen für  $\sigma$ ,  
 $u$  glatt

$u = 0$

$u$  analytisch  $\wedge$  (A2)

