Gemeinsame Zustands- und Schaltsignalbeobachtbarkeit

Stephan Trenn

AG Technomathematik, TU Kaiserslautern

gemeinsame Arbeit mit **F. Küsters** (Fraunhofer ITWM, Kaiserslautern)

Treffen des GAMM-Fachausschuss „Dynamik und Regelungstheorie“
Anif, 21.09.2016, 17:20–17:45

TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Generelle Fragestellungen

Anfangswert

$x_0 \in \mathbb{R}^n$

Eingang $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u, \quad x(0) = x_0 \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned}$$

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ Ausgang

$\sigma : \mathbb{R} \to \{1, 2, \ldots, N\}$

Schaltsignal

Fragestellungen

- Lässt sich Zustand und Schaltsignal eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen?
  $\to$ (x, σ)-Beobachtbarkeit
- Lässt sich Schaltsignal eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen?
  $\to$ σ-Beobachtbarkeit
- Lassen sich Schaltzeiten eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen?
  $\to$ t_S-Beobachtbarkeit

Beobachtbarkeits-Charakterisierungen Übersicht

$u = 0$		u analytisch $\wedge$ (A2)	Äquivalenzklassen für σ, u glatt
(x,σ)-Beobachtbarkeit $= \sigma$-Beobachtbarkeit		starke (x,σ)-Beobachtbarkeit $=$ starke σ-Beobachtbarkeit	starke $(x,[\sigma])$-Beobachtbarkeit $=$ starke $[\sigma]$-Beobachtbarkeit
$\operatorname{rk}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i & \mathcal{O}_j\end{bmatrix} = 2n$	$\Longleftarrow$	$\operatorname{rk}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i & \mathcal{O}_j & \Gamma_i - \Gamma_j\end{bmatrix} = 2n + \operatorname{rk}(\Gamma_i - \Gamma_j)$	
$\Downarrow$		$\Downarrow$	
(x,σ_1)-Beobachtbarkeit $= \sigma_1$-Beobachtbarkeit		starke (x,σ_1)-Beobachtbarkeit $=$ starke σ_1-Beobachtbarkeit	starke $(x,[\sigma_1])$-Beobachtbarkeit $=$ starke $[\sigma_1]$-Beobachtbarkeit
$\operatorname{rk}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i & \mathcal{O}_p\\ \mathcal{O}_j & \mathcal{O}_q\end{bmatrix} = 2n$	$\Longleftarrow$	$\mathcal{R}(\Sigma_{i,j}) = \{0\} \wedge \operatorname{rk}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i & \mathcal{O}_p & \Gamma_i - \Gamma_p\\ \mathcal{O}_j & \mathcal{O}_q & \Gamma_j - \Gamma_q\end{bmatrix} = 2n + \operatorname{rk}\begin{bmatrix}\Gamma_i - \Gamma_p\\ \Gamma_j - \Gamma_q\end{bmatrix}$	
$\Downarrow$		$\Downarrow$	
t_S-Beobachtbarkeit		starke t_S-Beobachtbarkeit	starke $[t_S]$-Beobachtbarkeit
$\operatorname{rk}(\mathcal{O}_i - \mathcal{O}_j) = n$	$\Longleftarrow$	$\mathcal{R}(\Sigma_{i,j}) = \{0\} \wedge \operatorname{rk}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i - \mathcal{O}_j & \Gamma_i - \Gamma_j\end{bmatrix} = n + \operatorname{rk}(\Gamma_i - \Gamma_j)$	

(x,σ)-Beobachtbarkeit für $u=0$

Lemma (Vidal et al. 2003)

$$\begin{aligned}\dot x &= A_\sigma x\\ y &= C_\sigma x\end{aligned} \quad \textit{ist } (x,\sigma)\textit{-beobachtbar}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\operatorname{rk}\left[\mathcal{O}_i^{[2n]}\ \mathcal{O}_j^{[2n]}\right] = 2n \quad \forall i \neq j, \qquad \textit{wobei } \mathcal{O}_i^{[2n]} = \begin{bmatrix} C_i \\ C_iA_i \\ \vdots \\ C_iA_i^{2n-1}\end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\dot\xi &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_j\end{bmatrix}\xi\\ y &= [C_i \ \ \text{-}C_j]\,\xi\end{aligned} \quad \textit{ist beobachtbar } \forall i\neq j$$

Schlussfolgerung

(x,σ)-Beobachtbarkeit kann auf Unterscheidbarkeit konstanter Schaltsignale sowie klassische Beobachtbarkeit jeder einzelner Moden (A_i, C_i) zurückgeführt werden

Schwächerer Beobachtbarkeitsbegriff

Problem

Annahme, dass jeder Mode beobachtbar $\rightarrow$ Für Fehlererkennungsszenarien ungeeignet

Beispiel

Normaler Betrieb	Fehler
$t < t_1$	$t \geq t_1$
$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x$	$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$
$y = [1 \;\; 0]\, x$	$y = [1 \;\; 0]\, x$

Neue Definition

Geschaltetes System heißt (x, σ_1)-beobachtbar $:\Longleftrightarrow$ Zustand and Schaltsignal lassen sich eindeutig aus Ein- und Ausgang bestimmen, sofern σ nicht konstant ist.

Charakterisierung (x, σ_1)-Beobachtbarkeit

Theorem (Küsters & T. 2016)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x \\ y &= C_\sigma x \end{aligned} \quad \textit{ist } (x,\sigma_1)\textit{-beobachtbar}$$

$$\iff$$

$$\operatorname{rk} \begin{bmatrix} \mathcal{O}_i^{[2n]} & \mathcal{O}_p^{[2n]} \\ \mathcal{O}_j^{[2n]} & \mathcal{O}_q^{[2n]} \end{bmatrix} = 2n \quad \forall i \neq j, p \neq q, (i,j) \neq (p,q)$$

Angemessenere Bedingung

Beobachtbarkeit der individuellen Moden (A_i, C_i) wird nicht mehr benötigt!

Beobachtbarkeits-Charakterisierungen Übersicht

$u = 0$	u analytisch $\wedge$ (A2)	Äquivalenzklassen für σ, u glatt
(x,σ)-Beobachtbarkeit $=\sigma$-Beobachtbarkeit	starke (x,σ)-Beobachtbarkeit $=$ starke σ-Beobachtbarkeit	starke $(x,[\sigma])$-Beobachtbarkeit $=$ starke $[\sigma]$-Beobachtbarkeit
$\operatorname{rk}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i & \mathcal{O}_j\end{bmatrix} = 2n$	$\operatorname{rk}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i & \mathcal{O}_j & \Gamma_i-\Gamma_j\end{bmatrix} = 2n + \operatorname{rk}(\Gamma_i-\Gamma_j)$	
(x,σ_1)-Beobachtbarkeit $=\sigma_1$-Beobachtbarkeit	starke (x,σ_1)-Beobachtbarkeit $=$ starke σ_1-Beobachtbarkeit	starke $(x,[\sigma_1])$-Beobachtbarkeit $=$ starke $[\sigma_1]$-Beobachtbarkeit
$\operatorname{rk}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i & \mathcal{O}_p\\ \mathcal{O}_j & \mathcal{O}_q\end{bmatrix} = 2n$	$\mathcal{R}(\Sigma_{i,j}) = \{0\} \wedge \operatorname{rk}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i & \mathcal{O}_p & \Gamma_i-\Gamma_p\\ \mathcal{O}_j & \mathcal{O}_q & \Gamma_j-\Gamma_q\end{bmatrix} = 2n + \operatorname{rk}\begin{bmatrix}\Gamma_i-\Gamma_p\\ \Gamma_j-\Gamma_q\end{bmatrix}$	
t_S-Beobachtbarkeit	starke t_S-Beobachtbarkeit	starke $[t_S]$-Beobachtbarkeit
$\operatorname{rk}(\mathcal{O}_i - \mathcal{O}_j) = n$	$\mathcal{R}(\Sigma_{i,j}) = \{0\} \wedge \operatorname{rk}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i - \mathcal{O}_j & \Gamma_i-\Gamma_j\end{bmatrix} = n + \operatorname{rk}(\Gamma_i-\Gamma_j)$	

Inhomogener Fall: Viele mögliche Definitionen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u\\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u\end{aligned} \quad \text{ist } *\text{-beobachtbar für} \begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{ein } u \in \mathcal{U}\\ \text{fast alle } u \in \mathcal{U}\end{array}\right\} \to \text{schwach } *\text{-beobachtbar}\\ \text{alle } u \in \mathcal{U} \quad \to \text{stark } *\text{-beobachtbar}\end{cases}$$

wobei $* \in \{\ (x,\sigma), \quad \sigma, \quad (x,\sigma_1), \quad \sigma_1, \quad t_S\ \}$ und

$$\mathcal{U} = \begin{cases}\text{lokal integrierbare Eingänge}\\ \text{glatte Eingänge}\\ \text{analytische Eingänge}\end{cases}$$

Zusätzliche Bedingung (A2) an B_i, D_i

Inhomogener Fall: Viele mögliche Definitionen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned} \quad \text{ist } *\text{-beobachtbar für} \begin{cases} \text{ein } u \in \mathcal{U} \\ \text{fast alle } u \in \mathcal{U} \\ \text{alle } u \in \mathcal{U} \end{cases}$$

(ein / fast alle) $\rightarrow$ schwach $*$-beobachtbar

(alle) $\rightarrow$ stark $*$-beobachtbar

wobei $* \in \{ (x, [\sigma]), \quad [\sigma], \quad (x, [\sigma_1]), \quad [\sigma_1], \quad [t_S] \}$ und

$$\mathcal{U} = \begin{cases} \text{lokal integrierbare Eingänge} \\ \text{glatte Eingänge} \\ \text{analytische Eingänge} \end{cases}$$

Betrachtung von Äquivalenzklassen von Schaltsignalen

Starke (x,σ)-Beobachtbarkeit

Annahmen

(A1) $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^q$ analytisch (insbesondere $u\equiv 0$ auf Interval $\implies$ $u\equiv 0$ überall)

(A2) $\ker\begin{bmatrix} B_i \\ B_j \\ D_i - D_j \end{bmatrix} = \{0\}$ für alle $i\neq j$

Theorem (cf. Lou & Sin 2009)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u\\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u\end{aligned}$$ *mit (A1) und (A2) ist stark (x,σ)-beobachtbar*

$$\iff$$

$$\operatorname{rk}\left[\ \mathcal{O}_i^{[2n]}\ \ \mathcal{O}_j^{[2n]}\ \ \Gamma_i^{[2n]}-\Gamma_j^{[2n]}\ \right] = 2n+\operatorname{rk}(\Gamma_i^{[2n]}-\Gamma_j^{[2n]})\ \forall i\neq j \quad \textit{wobei } \Gamma_i^{[2n]} = \begin{bmatrix} D & & & \\ CB & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ CA^{2n-2}B & \cdots & CB & D \end{bmatrix}$$

Beobachtbarkeit von (A_i, C_i) ist notwendig für starke (x,σ)-Beobachtbarkeit

Äquivalente Schaltsignale und starke $(x,[\sigma])$-Beobachtbarkeit

Definition (cf. Kaba 2014)

Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U}$ ist $\sigma \overset{x_0,u}{\sim} \overline{\sigma} \quad :\Longleftrightarrow$

1. $x(\cdot;x_0,u,\sigma) = x(\cdot;x_0,u,\overline{\sigma})$
2. $y(\cdot;x_0,u,\sigma) = y(\cdot;x_0,u,\overline{\sigma})$
3. Für jedes Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ gilt: $\quad x(t;x_0,u,\sigma) \neq 0 \ \forall t \in \mathcal{I} \quad \Longrightarrow \quad \sigma(t) = \overline{\sigma}(t) \ \forall t \in \mathcal{I}$

Mit entsprechender Äquivalenzklasse $\left[\sigma_{(x_0,u)}\right]$

Theorem (Küsters & T. 2016)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned} \quad \textit{mit glattem } u \textit{ ist stark } (x,[\sigma])\textit{-beobachtbar}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\operatorname{rk}\left[\ \mathcal{O}_i^{[2n]} \quad \mathcal{O}_j^{[2n]} \quad \Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]}\ \right] = 2n + \operatorname{rk}(\Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]}) \ \forall i \neq j$$

Verbindung zur starken Beobachtbarkeit bei LTIs

Analog zum homogenen Fall betrachte

$$\Sigma_{i,j}: \quad \begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_j \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} B_i \\ B_j \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_i & -C_j \end{bmatrix} \xi + (D_i - D_j) u \end{aligned}$$

Bemerkung

$$\operatorname{rk} \left[\ \mathcal{O}_i^{[2n]} \quad \mathcal{O}_j^{[2n]} \quad \Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]} \ \right] = 2n + \operatorname{rk}(\Gamma_i^{[2n]} - \Gamma_j^{[2n]})$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\Sigma_{i,j}$ ist stark beobachtbar, d.h. x kann nur durch y bestimmt werden (ohne Kenntnis von u)

Definition (Kontrollierbare schwach-unbeobachtbare Zustände, Trentelmann et al. 2001)

$$\mathcal{R}(\Sigma_{i,j}) = \left\{ \ \xi_0 \in \mathbb{R}^{2n} \ \middle| \ \exists u(\cdot), \exists T > 0 : \ \xi(T; \xi_0, u) = 0, \ y(\cdot; \xi_0, u) \equiv 0 \ \right\}$$

Beobachtbarkeits-Charakterisierungen Übersicht

$u = 0$	u analytisch $\wedge$ (A2)	Äquivalenzklassen für σ, u glatt
(x,σ)-Beobachtbarkeit $=\sigma$-Beobachtbarkeit	starke (x,σ)-Beobachtbarkeit $=$ starke σ-Beobachtbarkeit	starke $(x,[\sigma])$-Beobachtbarkeit $=$ starke $[\sigma]$-Beobachtbarkeit
$\operatorname{rk}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i & \mathcal{O}_j\end{bmatrix} = 2n$	$\operatorname{rk}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i & \mathcal{O}_j & \Gamma_i - \Gamma_j\end{bmatrix} = 2n + \operatorname{rk}(\Gamma_i - \Gamma_j)$	
(x,σ_1)-Beobachtbarkeit $=\sigma_1$-Beobachtbarkeit	starke (x,σ_1)-Beobachtbarkeit $=$ starke σ_1-Beobachtbarkeit	starke $(x,[\sigma_1])$-Beobachtbarkeit $=$ starke $[\sigma_1]$-Beobachtbarkeit
$\operatorname{rk}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i & \mathcal{O}_p\\ \mathcal{O}_j & \mathcal{O}_q\end{bmatrix} = 2n$	$\mathcal{R}(\Sigma_{i,j}) = \{0\} \wedge \operatorname{rk}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i & \mathcal{O}_p & \Gamma_i - \Gamma_p\\ \mathcal{O}_j & \mathcal{O}_q & \Gamma_j - \Gamma_q\end{bmatrix} = 2n + \operatorname{rk}\begin{bmatrix}\Gamma_i - \Gamma_p\\ \Gamma_j - \Gamma_q\end{bmatrix}$	
t_S-Beobachtbarkeit	starke t_S-Beobachtbarkeit	starke $[t_S]$-Beobachtbarkeit
$\operatorname{rk}(\mathcal{O}_i - \mathcal{O}_j) = n$	$\mathcal{R}(\Sigma_{i,j}) = \{0\} \wedge \operatorname{rk}\begin{bmatrix}\mathcal{O}_i - \mathcal{O}_j & \Gamma_i - \Gamma_j\end{bmatrix} = n + \operatorname{rk}(\Gamma_i - \Gamma_j)$	