Geschaltete differential-algebraische Gleichungen: Sprünge und Impulse

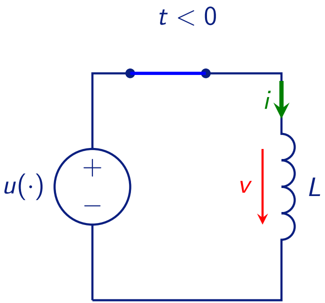
Stephan Trenn

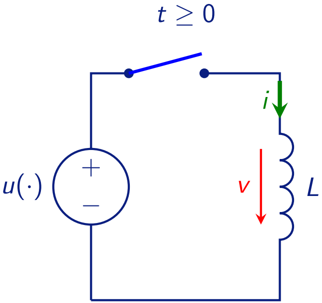
AG Technomathematik, TU Kaiserslautern

Fachvortrag W2-Professur „Mathematik (Dynamische Systeme)“
Universität Würzburg, 01.12.2014

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Motivierendes Beispiel



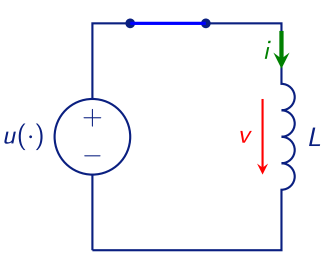


Induktivitätsgesetz: $L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i = v$

abhängig vom Schalter: $0 = v - u$ $\qquad$ $0 = i$

Motivierendes Beispiel

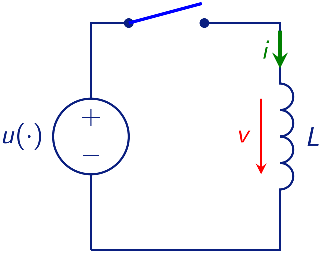
$t < 0$



$x = [i, v]^\top$

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$t \geq 0$

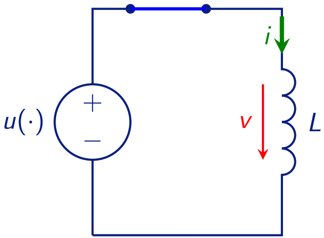


$x = [i, v]^\top$

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

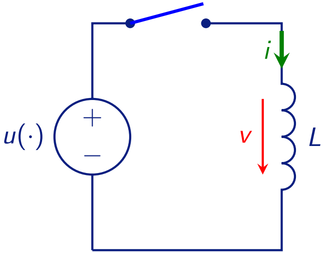
Motivierendes Beispiel

$t < 0$



$$E_1 \dot{x} = A_1 x + B_1 u$$
auf $(-\infty, 0)$

$t \geq 0$



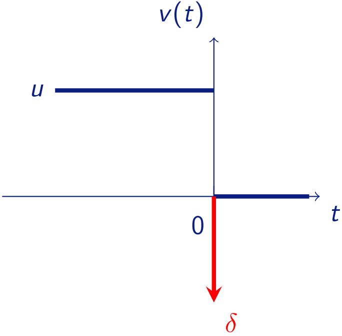
$$E_2 \dot{x} = A_2 x + B_2 u$$
auf $[0, \infty)$

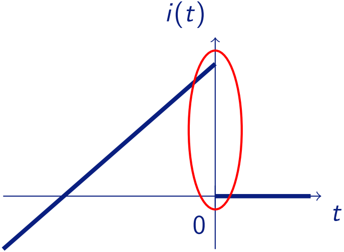
$\rightarrow$ geschaltete differential-algebraische Gleichung (DAE)

Lösung für das Beispiel

$t < 0$	$t \geq 0$
$v = u$	$i = 0$
$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i = v$	$v = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i$

Lösung (Annahme: konstante Eingangsspannung u):

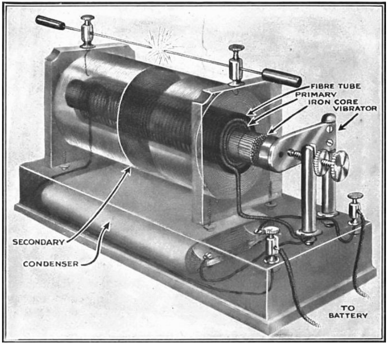




Dirac-Impuls ist “real”

Dirac-Impuls

Nicht bloß ein mathematisches Artefakt!



Zeichnung: Harry Winfield Secor, public domain

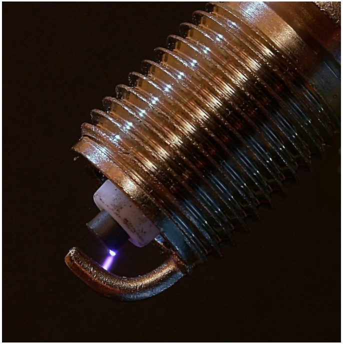


Foto: Ralf Schumacher, CC-BY-SA 3.0

Definition: Geschaltete DAE

Schalter $\to$ verschiedene DAE Modelle (=Modi)
abhängig von zeitvarianter Position des Schalters

Definition (Geschaltete DAE)

Schaltsignal $\sigma : \mathbb{R} \to \{1, \ldots, N\}$ wählt Modus zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \\ y(t) &= C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}u(t) \end{aligned} \tag{swDAE}$$

Achtung

Jeder Modus hat möglicherweise verschiedene Konsistenzräume
$\Rightarrow$ inkonsistente Anfangswerte bei jedem Schaltvorgang
$\Rightarrow$ Dirac-Impulse, insbesondere distributionelle Lösungen

Definition: Geschaltete DAE

Schalter → verschiedene DAE Modelle (=Modi)
abhängig von zeitvarianter Position des Schalters

Definition (Geschaltete DAE)

Schaltsignal $\sigma : \mathbb{R} \to \{1, \dots, N\}$ wählt Modus zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} E_\sigma \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned} \tag{swDAE}$$

Achtung

Jeder Modus hat möglicherweise verschiedene Konsistenzräume
⇒ inkonsistente Anfangswerte bei jedem Schaltvorgang
⇒ Dirac-Impulse, insbesondere distributionelle Lösungen

Inhalt

Distributionentheorie - wesentliche Ideen

Distributionen - Überblick

- verallgemeinerte Funktionen
- beliebig oft differenzierbar
- Dirac-Impuls δ ist "Ableitung" der Heaviside Sprungfunktion $\mathbb{1}_{[0,\infty)}$

Zwei verschiedene formale Zugänge

1. funktionalanalytisch: Dualraum der Testfunktionen (L. Schwartz 1950)
2. axiomatisch: Raum der "Ableitungen" aller stetigen Funktionen (J. Sebastião e Silva 1954)

Distributionen - formal

Definition (Testfunktionen)

$\mathcal{C}_0^\infty := \{\ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ glatt mit kompakten Träger }\}$

Definition (Distributionen)

$\mathbb{D} := \{\ D : \mathcal{C}_0^\infty \to \mathbb{R} \mid D \text{ ist linear und stetig }\}$

Definition (Reguläre Distributionen)

$f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$: $\quad f_{\mathbb{D}} : \mathcal{C}_0^\infty \to \mathbb{R},\ \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{D}$

Definition (Multiplikation mit glatten Funktionen)

$\alpha \in \mathcal{C}^\infty : \quad (\alpha D)(\varphi) := D(\alpha\varphi)$

Distributionen und geschaltete DAEs

$$\begin{aligned} E_\sigma \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned} \qquad \text{(swDAE)}$$

Koeffizienten nicht glatt!

Problem: $E_\sigma, A_\sigma, C_\sigma \notin \mathcal{C}^\infty$

Alternative Sichtweise, für $\sigma_{[t_i,t_{i+1})} \equiv p_i$, $i \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} E_\sigma \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{Z}: \begin{aligned} (E_{p_i}\dot{x})_{[t_i,t_{i+1})} &= (A_{p_i}x + B_{p_i}u)_{[t_i,t_{i+1})} \\ y_{[t_i,t_{i+1})} &= (C_{p_i}x + D_{p_i}u)_{[t_i,t_{i+1})} \end{aligned}$$

Neue Fragestellung: Einschränkungen von Distributionen

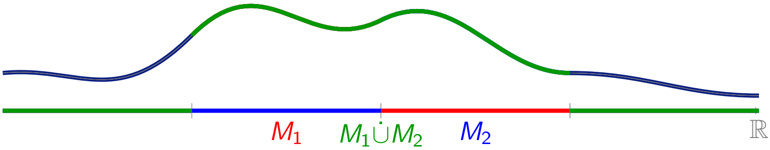
Distributionelle Einschränkung

Gewollt: Distributionelle Einschränkung

$$\{\ M \subseteq \mathbb{R}\ |\ M \text{ Interval}\ \} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad (M, D) \mapsto D_M$$

mit gewissen kanonischen Eigenschaften, insbesondere

$$D_{M_1 \dot{\cup} M_2} = D_{M_1} + D_{M_2}$$



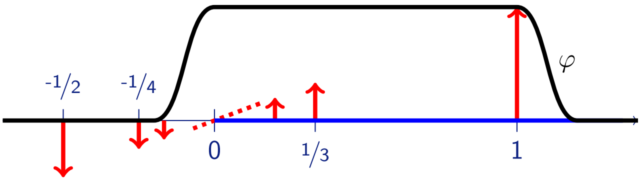
Theorem ([T. 2009])

Eine solche distributionelle Einschränkung existiert nicht.

Beweis durch Gegenbeispiel

Betrachte die wohldefinierte(!) Distribution :

$$D := \sum_{i\in\mathbb{N}} d_i \, \delta_{d_i}, \quad d_i := \frac{(-1)^i}{i+1}$$



Einschränkung sollte ergeben

$$D_{[0,\infty)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} d_{2k} \, \delta_{d_{2k}}$$

Wähle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ mit $\varphi_{[0,1]} \equiv 1$:

$$D_{[0,\infty)}(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{N}} d_{2k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2k+1} = \infty$$

Dilemma

Geschaltete DAEs

- Beispiel: distributionelle Lösungen
- Multiplikationen mit nichtglatten Koeffizienten
- Oder: Einschränkung auf Intervalle

Distributionen

- Distributionelle Einschränkung unmöglich
- Multiplikation mit nichtglatten Koeffizienten unmöglich
- *Anfangswerte können nicht formuliert werden*

Zugrundeliegendes Problem

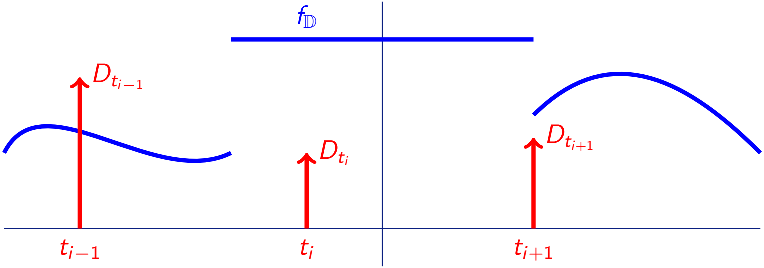
Raum der Distributionen zu groß.

Stückweise glatte Distributionen

Definiere kleineren, passenden Raum

Definition (Stückweise glatte Distributionen $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$, [T. 2009])

$$\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty} := \left\{ f_{\mathbb{D}} + \sum_{t \in T} D_t \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^\infty_{\text{pw}}, \\ T \subseteq \mathbb{R} \text{ lokal endlich}, \\ \forall t \in T : D_t = \sum_{i=0}^{n_t} a_i^t \delta_t^{(i)} \end{array} \right\}$$



Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$

- $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{pw}}$ "$\subseteq$" $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$
- $D \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty} \Rightarrow D' \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$
- wohldefinierte Einschränkung $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty} \to \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$

$$D = f_{\mathbb{D}} + \sum_{t\in T} D_t \quad \mapsto \quad D_M := (f_M)_{\mathbb{D}} + \sum_{t\in T\cap M} D_t$$

- Multiplikation mit $\alpha = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_{i[t_i,t_{i+1})} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{pw}}$ wohldefiniert:

$$\alpha D := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i D_{[t_i,t_{i+1})}$$

- Auswertung in $t\in\mathbb{R}$: $D(t^-) := f(t^-)$, $D(t^+) := f(t^+)$
- Impulse in $t\in\mathbb{R}$: $D[t] := \begin{cases} D_t, & t\in T \\ 0, & t\notin T \end{cases}$

Anwendung auf (swDAE)

(x,u) löst (swDAE) $\quad :\Leftrightarrow \quad$ (swDAE) gilt in $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$

Inhalt

Ergebnisse 2009-2014

Beobachtbarkeit

Verallgemeinerungen

Lösungstheorie

$$\boxed{\begin{aligned} E_\sigma \dot{x} &= A_\sigma x + B_\sigma u \\ y &= C_\sigma x + D_\sigma u \end{aligned}}$$

Existenz & Eindeutigkeit
Explizite Lösungsformeln

Stabilität

Lineare Algebra

Steuerbarkeit

Approximation

Ergebnisse 2009-2014

Beobachtbarkeit
- Charakterisierung (mit A. Tanwani, USA/F/D)
- Beobachter (laufendes DFG-Projekt)

Stabilität
- Impulsfreiheit
- Lyapunov-Theorem (mit D. Liberzon, USA)
- konverses Lyapunov-Theorem (mit F. Wirth)

Steuerbarkeit
- Kalman-Zerlegung (mit T. Berger, Hamburg)
- Charakterisierung

Ergebnisse 2009-2014

Beobach

Stabilität

Exist
Expli

Steuerb

Verallgemeinerungen
- distributionelle Koeffizienten
- geschaltete Behaviours (mit J.C. Willems)

Lineare Algebra
- Wong-Sequenzen
- Quasi-Kronecker Form (mit T. Berger)

Approximation
- Konvergenz für schnelles Schalten (mit F. Vasca, Italien)

Inhalt

Erweiterung auf nichtlineare Systeme

Nichtlineare geschaltete DAEs

$$\begin{aligned} E_\sigma \dot{x} &= f_\sigma(x,u) \\ y &= h_\sigma(x,u) \end{aligned} \qquad \text{(nlswDAE)}$$

Lösungstheorie!

- Nichtlineare Auswertung von Distributionen?
  - Was ist zum Beispiel $\sin(\delta)$?
- Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
  - Selbst für ungeschaltete DAEs unklar
  - Induzierte Sprünge?
  - Induzierte Dirac-Impulse?

Motivation: Energienetze

Foto: David Jolly, public domain

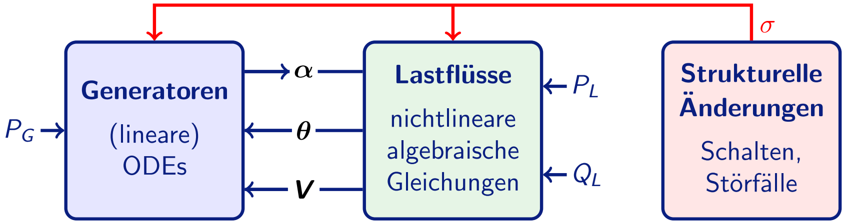
Foto: Armin Kübelbeck, CC-BY-SA 3.0

Neuartige Stabilisierungsmethoden nötig!

Insbesondere Berücksichtigung von plötzlichen strukturellen Änderungen:

- Zu- und Abschalten von Generatoren und Leitungen
- Ausfälle von Komponenten

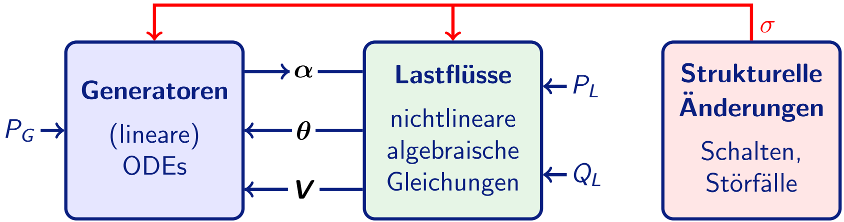
Klassische Modellierung von Energienetzen



$$M\ddot{\alpha} = D\dot{\alpha} - P_E(\alpha, \theta, V) + P_G$$

- α: Rotationswinkel des Generators
- θ: Phasenwinkel der Wechselspannung
- V: Effektivwert der Spannung
- P_G: Generatorleistung
- $P_E(\alpha, \theta, V) = cV\sin(\alpha - \theta)$: Elektrische Leistung

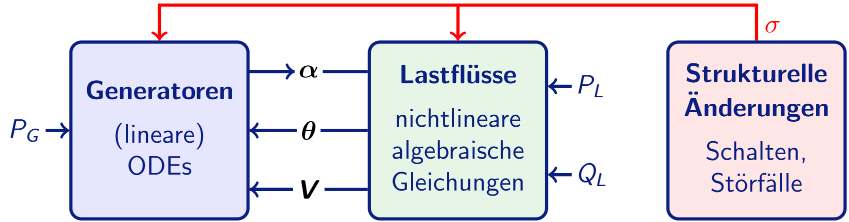
Klassische Modellierung von Energienetzen



$$M\ddot{\boldsymbol{\alpha}} = D\dot{\boldsymbol{\alpha}} - P_E(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{V}) + P_G$$

$$0 = P_B(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{V}) + P_E(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{V}) - P_L$$
$$0 = Q_B(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{V}) + Q_E(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{V}) - Q_L$$

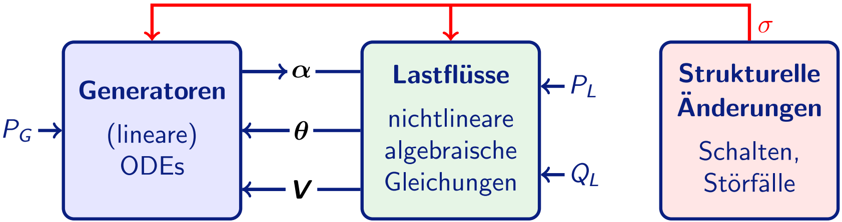
Klassische Modellierung von Energienetzen



$$E\dot{x} = f(x, u)$$

$$x = (\boldsymbol{\alpha}, \dot{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{V}), \quad u = (P_G, P_L, Q_L)$$

Klassische Modellierung von Energienetzen



$$E_\sigma \dot{x} = f_\sigma(x, u)$$

$$x = (\boldsymbol{\alpha}, \dot{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{V}), \quad u = (P_G, P_L, Q_L)$$

Zukunft

Lösungstheorie

$$\boxed{\begin{aligned} E_\sigma \dot{x} &= f_\sigma(x,u) \\ y &= h_\sigma(x,u) \end{aligned}}$$

Funnel Control

- Schaltlogik
- Synchronisation (mit H. Shim, Seoul)
- Robotik (mit C. Hackl, TUM)

Kontrolltheorie
insb. Anwendung auf Energienetze