Die quasi-Kronecker Form

Stephan Trenn, gemeinsam mit Thomas Berger (TU Ilmenau)

AG Technomathematik, TU Kaiserslautern

Workshop "Deskriptor 2013"
Geseke, 05.03.2013, 10:20

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Inhalt

Kroneckernormalform von beliebigen Matrizenpaaren

Theorem (Kroneckernormalform (KCF), Kronecker 1890)

$\forall (E,A)\ \exists S,T$ *invertierbar:*

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} E_P & 0 & 0 \\ 0 & E_R & 0 \\ 0 & 0 & E_Q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & A_R & 0 \\ 0 & 0 & A_Q \end{bmatrix} \right)$$

mit (E_R, A_R) *in Weierstraßnormalform (WCF) und*

$$(E_P, A_P) = \left(\operatorname{diag}(\mathcal{P}^E_{\varepsilon_1}, \mathcal{P}^E_{\varepsilon_2}, \ldots, \mathcal{P}^E_{\varepsilon_p}), \operatorname{diag}(\mathcal{P}^A_{\varepsilon_1}, \mathcal{P}^A_{\varepsilon_2}, \ldots, \mathcal{P}^A_{\varepsilon_p}) \right)$$

$$(E_Q, A_Q) = \left(\operatorname{diag}(\mathcal{Q}^E_{\eta_1}, \mathcal{Q}^E_{\eta_2}, \ldots, \mathcal{Q}^E_{\eta_q}), \operatorname{diag}(\mathcal{Q}^A_{\eta_1}, \mathcal{Q}^A_{\eta_2}, \ldots, \mathcal{Q}^A_{\eta_q}) \right)$$

wobei für $k \in \mathbb{N}$*:*

$$(\mathcal{P}^E_k, \mathcal{P}^A_k) = \left(\left.\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} k \right) = ({\mathcal{Q}^E_k}^\top, {\mathcal{Q}^A_k}^\top)$$

Typische Struktur der KCF

$$(SET, SAT) =$$

$$\left(\begin{bmatrix} -\,- & & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix}0 & 1\end{matrix}} & & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1\end{matrix}} & & & & \\ & & & \boxed{\text{WCF}} & & & \\ & & & & | & & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} & \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\,- & & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix}1 & 0\end{matrix}} & & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix}1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0\end{matrix}} & & & & \\ & & & \boxed{\text{WCF}} & & & \\ & & & & | & & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} \end{bmatrix} \right)$$

$$(E_P, A_P) = \big(\operatorname{diag}(\mathcal{P}_0^E, \mathcal{P}_0^E, \mathcal{P}_1^E, \mathcal{P}_3^E), \operatorname{diag}(\mathcal{P}_0^A, \mathcal{P}_0^A, \mathcal{P}_1^A, \mathcal{P}_3^A)\big)$$

$$(E_R, A_R) = \text{WCF}$$

$$(E_Q, A_Q) = \big(\operatorname{diag}(\mathcal{Q}_0^E, \mathcal{Q}_1^E, \mathcal{Q}_1^E), \operatorname{diag}(\mathcal{Q}_0^A, \mathcal{Q}_1^A, \mathcal{Q}_1^A)\big)$$

Anwendung auf Lösungscharakterisierung

Differential-algebraische Gleichung

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t) \qquad \textbf{(DAE)}$$

$$x \text{ löst } \textbf{(DAE)} \quad \overset{S,T \text{ inv.}}{\Leftrightarrow} \quad z = T^{-1}x \text{ löst } SET\,\dot{z} = SAT\,z + Sf$$

Folgerung

Vollständige Lösungscharakterisierung durch Betrachtung von:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} x_P + f_P \qquad \rightarrow \qquad \textit{unterbestimmt}$$

$$E_R\dot{x}_R = A_R x_R + f_R \qquad \rightarrow \qquad \textit{regulär}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \dot{x}_Q = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & \ddots & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} x_Q + f_Q \qquad \rightarrow \qquad \textit{überbestimmt}$$

Regulärer Block

$$E_R \dot{x}_R = A_R x_R + f$$

Theorem (Weierstraßnormalform (WCF), Weierstrass 1868)

(E_R, A_R) regulär $\Leftrightarrow \exists S_R, T_R$ invertierbar:

$$(S_R E_R T_R, S_R A_R T_R) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)$$

mit J, N in Jordannormalform und N nilpotent.

Lösungsverhalten:

- ODE: $\dot{v} = Jv + f_1 \to$ bekannte Lösungsformel
- reine DAE: $N\dot{w} = w + f_2 \to x = -\sum_{i=0}^{\nu-1} N^i f^{(i)}$

$\Rightarrow$ Existenz von Lösungen für alle glatten f und Eindeutigkeit für gegebenes $x_R(0)$

Unterbestimmte Blöcke

Unterbestimmter Block: ODE-Ansatz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} x + f$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{k+1} \end{pmatrix} + f + \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungsverhalten:

ODE mit genau einem zusätzlichen skalaren Eingang x_1.

Es geht auch anders ...

Unterbestimmte Blöcke

Unterbestimmter Block: Als reine DAE

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} x + f$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} + f + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dot{x}_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = -\sum_{i=0}^{k} N^i([e_1, \ldots, e_k] f^{(i)} + e_{k+1} u^{(i)})$$

Lösungsverhalten:

$\exists M(s), K(s)\ \forall u(\cdot):\ x = M(\frac{d}{dt})(f) + K(\frac{d}{dt})(u)$ ist Lösung

Unterbestimmte Blöcke

Unterbestimmter Block: Als reine DAE

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} x + f$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 0 & \color{red}{1} \\ & & & & \color{red}{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_k \\ \dot{x}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \color{red}{x_{k+1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ \\ \\ \\ \color{red}{u} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = -\sum_{i=0}^{k} N^i([e_1, \ldots, e_k] f^{(i)} + e_{k+1} u^{(i)})$$

Lösungsverhalten:

$\exists M(s), K(s)\ \forall u(\cdot):\ x = M(\frac{d}{dt})(f) + K(\frac{d}{dt})(u)$ ist Lösung

Überbestimmte Blöcke

Überbestimmter Block

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & \ddots & & \\ & \ddots & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} x + f$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = x + \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{k-1} \\ f_k \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \dot{x}_k = f_{k+1}$$

$$\Leftrightarrow x = -\sum_{i=0}^{k-1} N^i f^{(i)} \quad \wedge \quad f_{k+1} + e_k^\top \sum_{i=0}^{k-1} N^i f^{(i+1)} = 0$$

Lösungsverhalten:

$\exists M(s), K(s): \quad x = M(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})(f) \quad$ falls $K(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})(f) = 0$

Problem

KCF

- Berechnung der KCF aufwendig
- Numerisch schlecht gestellt
- Feinstruktur nicht nötig für Lösungscharakterisierung
- Symbolische Einträge schlecht handhabbar

Quasi-Kroneckerform (QKF)

Finde quasi-Kroneckerform, die

- sich einfach berechnen lässt
- immernoch vollständige Lösungscharakterisierung zulässt
  - Anzahl und Einfluss freier Variablen
  - regulärer Anteil
  - Restriktionen an die Inhomogenität

Inhalt

Wongsequenzen

Definition (Wongsequenzen, Wong 1974)

$$\mathcal{V}_0 = \mathbb{R}^n, \qquad \mathcal{V}_{i+1} = A^{-1}(E\mathcal{V}_i), \qquad i = 0,1,2,\dots$$
$$\mathcal{W}_0 = \{0\}, \qquad \mathcal{W}_{i+1} = E^{-1}(A\mathcal{W}_i), \qquad i = 0,1,2,\dots$$

$$\mathcal{V}^* := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_i \qquad \mathcal{W}^* := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_i$$

Theorem (Wong '74, s. a. Armentano '86, Berger & T. '12)

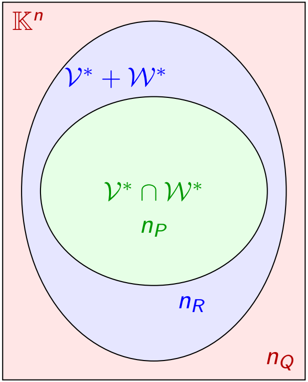
(E,A) *regulär* $\quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{V}^*\oplus\mathcal{W}^* = \mathbb{R}^n \ \wedge\ E\mathcal{V}^*\oplus A\mathcal{W}^* = \mathbb{R}^{m=n}$

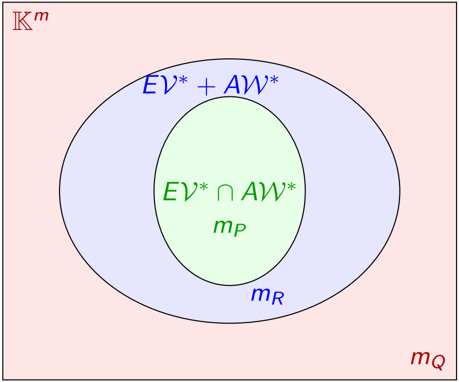
Mit im $V = \mathcal{V}^*$, im $W = \mathcal{W}^*$ *und* $T = [V, W], S = [EV, AW]^{-1}$:

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)$$

N *nilpotent* $\quad\to\quad$ *quasi-Weierstraßform*

Wongsequenzen im singulären Fall





Quasi-Kronecker Dreiecksform (QKTF)

$$\operatorname{im} P_1 = \mathcal{V}^* \cap \mathcal{W}^*, \qquad \operatorname{im} P_2 = E\mathcal{V}^* \cap A\mathcal{W}^*,$$
$$\mathcal{V}^* \cap \mathcal{W}^* \oplus \operatorname{im} R_1 = \mathcal{V}^* + \mathcal{W}^*, \qquad E\mathcal{V}^* \cap A\mathcal{W}^* \oplus \operatorname{im} R_2 = E\mathcal{V}^* + A\mathcal{W}^*,$$
$$(\mathcal{V}^* + \mathcal{W}^*) \oplus \operatorname{im} Q_1 = \mathbb{K}^n, \qquad (E\mathcal{V}^* + A\mathcal{W}^*) \oplus \operatorname{im} Q_2 = \mathbb{K}^m.$$

Theorem (QKTF, Berger & T. 2012)

$T = [P_1, R_1, Q_1], \quad S = [P_2, R_2, Q_2]^{-1} \quad \Rightarrow$

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} E_P & E_{PR} & E_{PQ} \\ 0 & E_R & E_{RQ} \\ 0 & 0 & E_Q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_P & A_{PR} & A_{PQ} \\ 0 & A_R & A_{RQ} \\ 0 & 0 & A_Q \end{bmatrix} \right) \qquad \textbf{(QKTF)}$$

- $m_P < n_P, \quad \operatorname{rank}(\lambda E_P - A_P) = m_P \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
- $m_R = n_R, \quad (E_R, E_R)$ *regulär*
- $m_Q > n_Q, \quad \operatorname{rank}(\lambda E_Q - A_Q) = n_Q \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Quasi-Kroneckerform (QKF)

Für (**QKTF**) sind folgende lineare Matrizengleichungen sind lösbar:

$$0 = E_{RQ} + E_R F_1 + F_2 E_Q, \qquad 0 = A_{RQ} + A_R F_1 + F_2 A_Q$$
$$0 = E_{PR} + E_P G_1 + G_2 E_R, \qquad 0 = A_{PR} + A_P G_1 + G_2 A_R$$
$$0 = (E_{PQ} + E_{PR} F_1) + E_P H_1 + H_2 E_Q, \qquad 0 = (A_{PQ} + A_{PR} F_1) + A_P H_1 + H_2 A_Q$$

Theorem (QKF, Berger & T. 2012)

$T = [P_1, R_1 + P_1 G_1, Q_1 + P_1 H_1 + R_1 F_1]$, $S = [P_2, R_2 - P_2 G_2, Q_2 - P_2 H_2 - R_2 F_2]^{-1}$
$\Rightarrow$

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} E_P & 0 & 0 \\ 0 & E_R & 0 \\ 0 & 0 & E_Q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & A_R & 0 \\ 0 & 0 & A_Q \end{bmatrix} \right) \qquad \textbf{(QKF)}$$

*Diagonalblöcke identisch zu denen in (**QKTF**).*

DAE-Lösungscharakterisierung mittels QKF

$$E\dot{x} = Ax + f \quad \text{mit} \quad (SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} E_P & 0 & 0 \\ 0 & E_R & 0 \\ 0 & 0 & E_Q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & A_R & 0 \\ 0 & 0 & A_Q \end{bmatrix} \right)$$

Wähle unimodulare Matrizen $[M_P(s), K_P(s)]$ und $\begin{bmatrix} M_Q(s) \\ M_P(s) \end{bmatrix}$ mit

$$(sE_P - A_P)[M_P(s), K_P(s)] = [I, 0] \qquad \begin{bmatrix} M_Q(s) \\ K_Q(s) \end{bmatrix} (sE_Q - A_Q) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

Theorem (Lösungscharakterisierung mittels QKF)

x löst $E\dot{x} = Ax + f \quad \Leftrightarrow \quad$ für $\begin{pmatrix} x_P \\ x_R \\ x_Q \end{pmatrix} = T^{-1}x$ und $\begin{pmatrix} f_P \\ f_R \\ f_Q \end{pmatrix} = Sf$:

- $x_P = M_P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})(f_P) + K_P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})(u)$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_P - m_P}$ *beliebig*
- $E_R\dot{x}_R = A_R x + f_R$, *Lösungsformel z.B. mittels QWF*
- $x_Q = M_Q(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})(f_Q)$ *und* $K_Q(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})(f_Q) = 0$

Lösungscharakterisierung mittels QKTF

$$E\dot{x} = Ax + f \quad \text{mit} \quad (SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} E_P & E_{PR} & E_{PQ} \\ 0 & E_R & E_{RQ} \\ 0 & 0 & E_Q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_P & A_{PR} & A_{PQ} \\ 0 & A_R & A_{RQ} \\ 0 & 0 & A_Q \end{bmatrix} \right)$$

Wähle $[M_P(s), K_P(s)]$ und $\begin{bmatrix} M_Q(s) \\ M_P(s) \end{bmatrix}$ wie zuvor

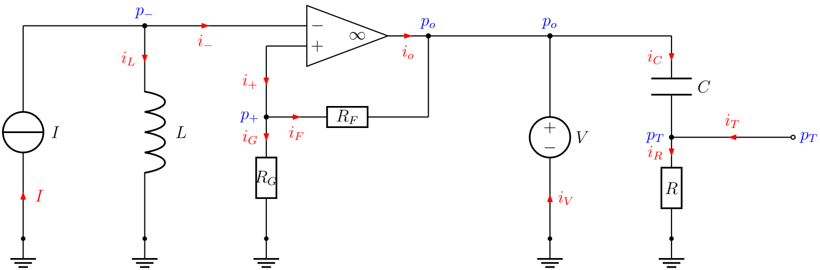
Theorem (Lösungscharakterisierung mittels QKTF)

x löst $E\dot{x} = Ax + f \quad \Leftrightarrow \quad$ für $\begin{pmatrix} x_P \\ x_R \\ x_Q \end{pmatrix} = T^{-1}x$ und $\begin{pmatrix} f_P \\ f_R \\ f_Q \end{pmatrix} = Sf$:

- $x_Q = M_Q(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})(f_Q)$ *und* $K_Q(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})(f_Q) = 0$
- $E_R\dot{x}_R = A_R x + f_R + A_{RQ}x_Q - E_{RQ}\dot{x}_Q$
- $x_P = M_P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})(\widetilde{f}_P) + K_P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})(u)$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n_P - m_P}$ *beliebig und*

$$\widetilde{f}_P = f_P + A_{PR}x_R - E_{PR}\dot{x}_R + A_{PQ}x_Q - E_{PQ}\dot{x}_Q$$

Beispiel: Schaltkreis und DAE



$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -C & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\dot{x} =
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
x +
\begin{bmatrix}
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
1 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}
$$

Beispiel: Wongsequenzen

$$\mathcal{V}_1 = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\R&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&-1&1\\-1&1&-1 \end{bmatrix} = \mathcal{V}^*$$

$$\mathcal{W}_1 = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}_2 = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \mathcal{W}^*$$

Die Transformationsmatrizen

$$T = [P_1, R_1, Q_1] = \left[\begin{array}{ccc|cccccccccc|c}
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
R&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
-1&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0
\end{array}\right]$$

$$S^{-1} = [P_2, R_2, Q_2] = \left[\begin{array}{c|cccccccccc|cc}
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&-K&-\frac{R_F}{R_G}&1&0&0&-R_F&K&R_F&0&0&0&1
\end{array}\right].$$

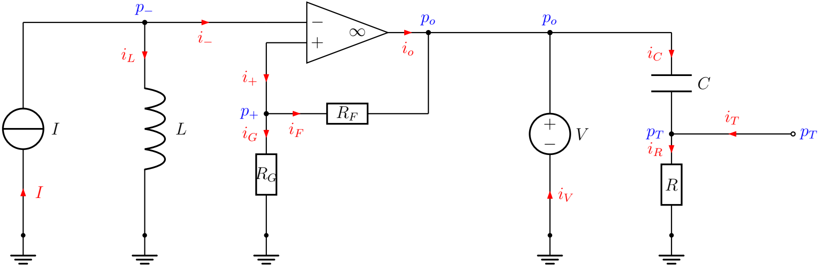
Beispiel: QKTF

$$(SET, SAT) =$$

$$\left(\begin{bmatrix} CR & 0 & 0 & 0 & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & LK \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & R_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & R_F & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$[M_P(s), K_P(s)] = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & CRs & 1 \end{array}\right] \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} M_Q(s) \\ K_Q(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \hline -LKs & 1 \end{array}\right]$$

Beispiel: Lösungscharakterisierung



Existenz von Lösungen

$$K_Q(\tfrac{d}{dt})(f_Q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V = LK\tfrac{d}{dt}I$$

Zusätzliche Eingänge

$$x_P = M_P(\tfrac{d}{dt})(\widetilde{f}_P) + K_P(\tfrac{d}{dt})\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad i_o = u_1, \quad p_T - p_0 = u_2$$

Zusammenfassung

$$E\dot{x} = Ax + f$$

- Kroneckernormalform liefert vollständige Lösungscharakterisierung
  - unterbestimmte Blöcke
  - regulärer Block
  - überbestimmte Blöcke
- Quasikroneckerform $(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} E_P & 0 & 0 \\ 0 & E_R & 0 \\ 0 & 0 & E_Q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & A_R & 0 \\ 0 & 0 & A_Q \end{bmatrix} \right)$ liefert ähnliche Charakterisierung
- QKF kann einfach mittels Wongsequenzen ermittelt werden
- Wongsequenzen liefern noch weitere Information, z.B.
  - Kroneckers Minimalindizes durch Betrachtung von $\mathcal{V}_i \to \mathcal{V}_{i+1}$ und $\mathcal{W}_i \to \mathcal{W}_{i+1}$
  - Entkopplung des regulären Blocks (Berger & T. 2013)

Berger & T. 2012: *The quasi-Kronecker form for matrix pencils*, **SIMAX 33 (2)**