

# Der Funnel-Regler: 10 Jahre Adaption

Stephan Trenn

AG Technomathematik, Technische Universität Kaiserslautern

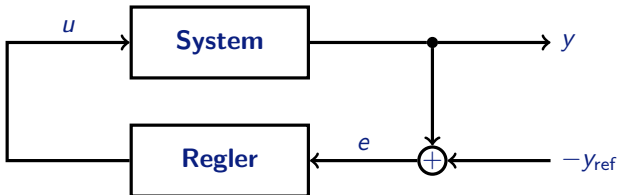
Kolloquiumsvortrag am Lehrstuhl für Automatisierungstechnik und  
Prozessinformatik, Ruhr-Universität Bochum, 27.11.2012





- 1 Einleitung
- 2 Der Funnel Regler
- 3 Adaptionen des Funnel Reglers

# Regelungstechnische Fragestellung

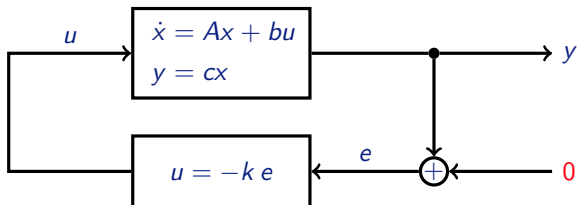


Ziel: **Trajektorienfolgeregelung**

ohne

- genaue Kenntnis eines Systemmodells
- Kenntnis des Referenzsignals (nur Fehler  $e$  ist dem Regler bekannt)
- asymptotische Konvergenz (aber beliebig kleiner Fehler)

# High-gain-Regelung: linearer Fall



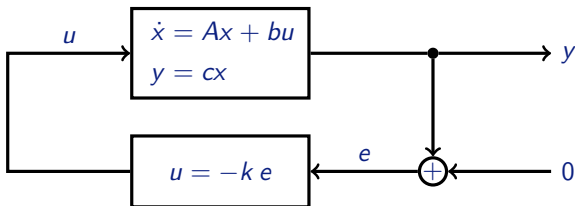
Annahmen:

- **Relativgrad  $r = 1$**   $\Leftrightarrow \gamma := cb \neq 0$ , insbesondere:

$$\text{System} \Leftrightarrow \begin{aligned} \dot{y} &= a_{11}y + a_{12}z + \gamma u \\ \dot{z} &= a_{21}y + A_{22}z \end{aligned}$$

- **Positive Hochfrequenzverstärkung**  $\Leftrightarrow \gamma > 0$
- **Stabile Nulldynamik**  $\Leftrightarrow A_{22}$  Hurwitz

# High-gain-Regelung: linearer Fall



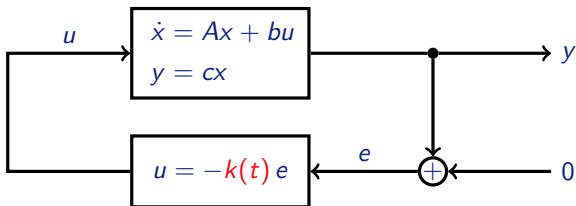
## Theorem (High-gain Regelung)

$cb > 0$  und stabile Nulldynamik  $\Rightarrow \exists k_0 > 0$ :

$\forall k \geq k_0$  : Geschlossener Kreis ist *asymptotisch stabil*

Problem: Wie findet man  $k_0$ ?

# High-gain-Regelung: linearer Fall



Idee: Mache Verstärkung  $k$  zeitvariant

## Theorem (Adaptiver High-Gain Regler)

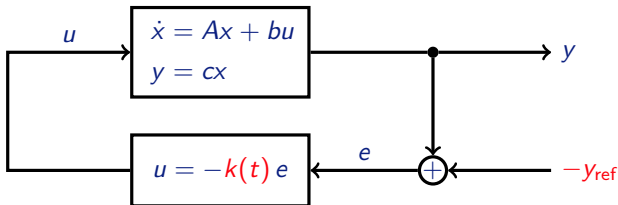
$cb > 0$  und stabile Nulldynamik  $\Rightarrow$

$\dot{k}(t) = e(t)^2$  macht geschlossenen Kreis *asymptotisch stabil*

und  $k(\cdot)$  bleibt *beschränkt*

Problem: Störungen ( $y_{\text{ref}} \neq 0$ ) führen zu **unbeschränkten**  $k(\cdot)$ !

# High-gain-Regelung: linearer Fall



Lösung: Fordere nur noch **praktische Stabilität**, d.h.  $|e(t)| \leq \lambda$  für  $t \gg 0$

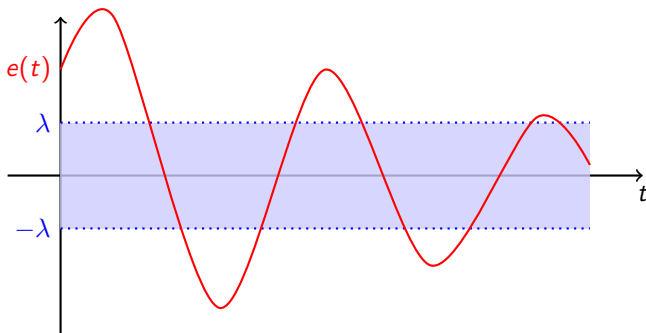
## Theorem ( $\lambda$ -tracking)

Sei  $cb > 0$ , stabile Nulldynamik und  $y_{ref}, \dot{y}_{ref}$  **beschränkt**. Für  $\lambda > 0$  betrachte

$$\dot{k}(t) = \begin{cases} e(t)(e(t) - \lambda), & |e(t)| > \lambda, \\ 0, & |e(t)| \leq \lambda. \end{cases}$$

Dann ist geschlossener Kreis **praktisch stabil**.

# Verbleibende Probleme vom $\lambda$ -tracker



Probleme:

- Keine Garantien **wann**  $|e(t)| \leq \lambda$
- Keine Beschränkung der **initialen Ausschläge**
- Monoton **wachsendes**  $k(\cdot) \Rightarrow$  Messfehler werden unnötig verstärkt

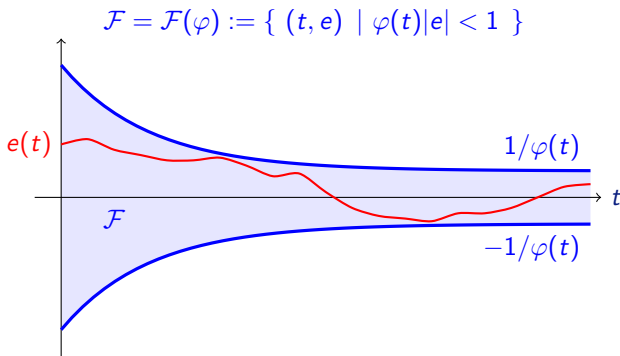


# Inhalt



- 1 Einleitung
- 2 Der Funnel Regler
- 3 Adaptionen des Funnel Reglers

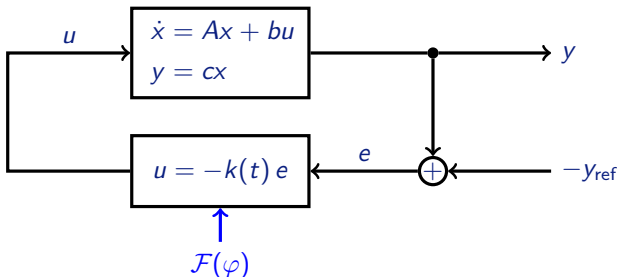
# Der Funnel als zeitvariante Fehlerschranke



Idee:  $k(t)$  **groß**  $\Leftrightarrow$  Abstand von  $e(t)$  zum Funnelrand **klein**

$$k(t) = \frac{1}{1 - \varphi(t)|e(t)|}$$

# Der lineare SISO Fall



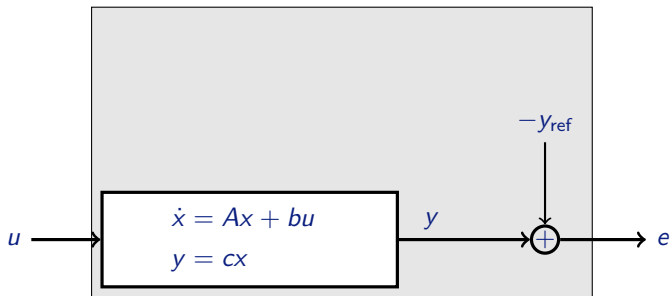
## Theorem (Funnel Regler, Ilchman, Ryan, Sangwin 2002)

Sei  $cb > 0$ ,  $A_{22}$  Hurwitz,  $y_{ref}, \dot{y}_{ref}, \varphi, \dot{\varphi}$  beschränkt,  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) > 0$  und  $e(0)\varphi(0) < 1$ . Dann ist

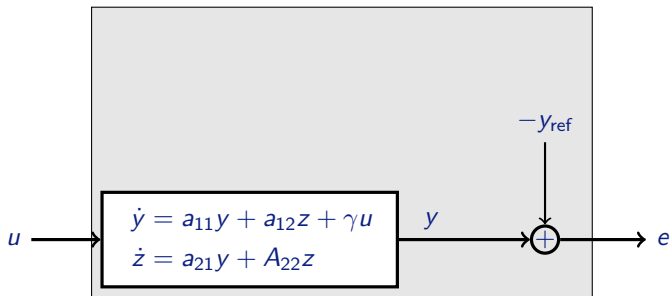
$$k(t) = \frac{1}{1 - \varphi(t)|e(t)|}$$

im geschlossenen Kreis beschränkt, d.h.  $e(t)$  verbleibt im Funnel.

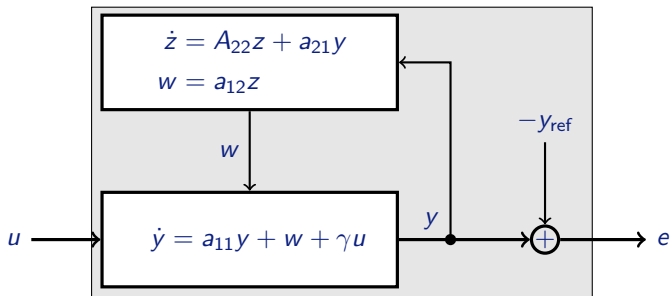
# Beweisidee: Neuinterpretation des Systems



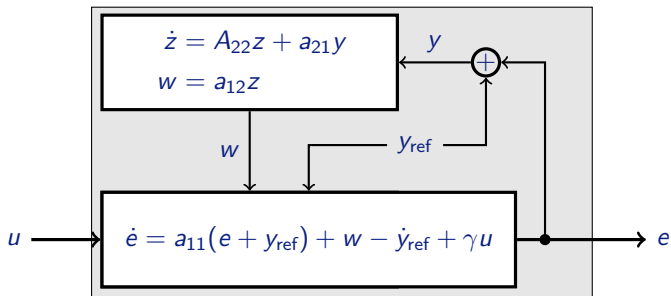
# Beweisidee: Neuinterpretation des Systems



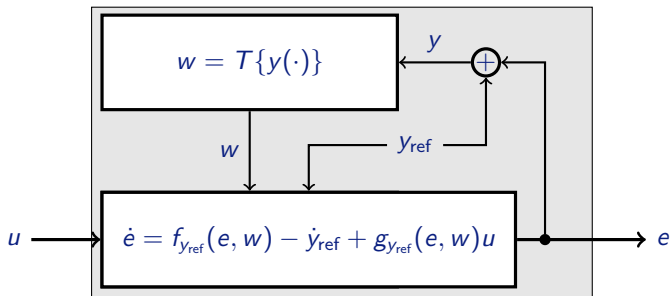
# Beweisidee: Neuinterpretation des Systems



# Beweisidee: Neuinterpretation des Systems



# Beweisidee: Neuinterpretation des Systems



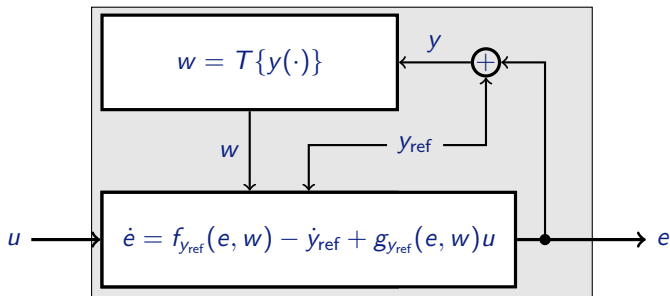
Voraussetzungen:

- $T$  ist **kausaler BIBO-Operator**, d.h.  $\exists \kappa(\cdot) : \|w\| \leq \kappa(\|y\|)$
- $f_{y_{ref}}$  und  $g_{y_{ref}}$  stetig und  $g_{y_{ref}} > 0$
- $y_{ref}$  und  $\dot{y}_{ref}$  **beschränkt**





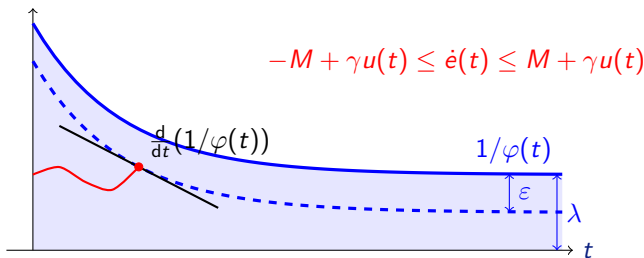
# Beweisidee: Neuinterpretation des Systems



Beweisidee: Betrachte maximale Lösung  $e : [0, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , zu zeigen  $\omega = \infty$ .

- $e(t)$  im Funnel  $\Rightarrow e$  beschränkt  $\Rightarrow y$  beschränkt  $\Rightarrow w$  beschränkt
- $\Rightarrow f_{y_{ref}}(e, w)$  beschränkt,  $g_{y_{ref}}(e, w)$  von Null weg beschränkt
- $\Rightarrow -M + \gamma u(t) \leq \dot{e}(t) \leq M + \gamma u(t)$
- Also  $u(t) \gg 0 \Rightarrow \dot{e}(t) \gg 0$  und  $u(t) \ll 0 \Rightarrow \dot{e}(t) \ll 0$

## Beweisidee: Funnell invariant

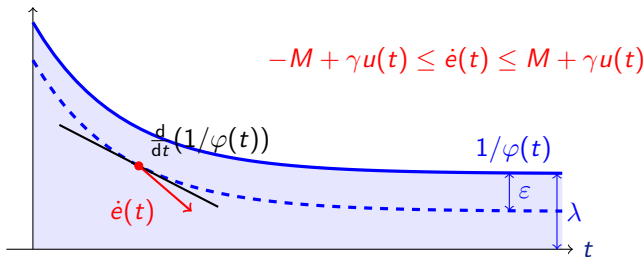


$$-M + \gamma u(t) \leq \dot{e}(t) \leq M + \gamma u(t)$$

Annahmen:  $\varepsilon < \lambda/2$ ,  $\varphi(t) \geq \Phi$ ,  $\frac{d}{dt}(1/\varphi(t)) \geq -\Psi$

- $e(t) = \frac{1}{\varphi(t)} - \varepsilon \Rightarrow k(t) = \frac{1}{1 - \varphi(t)|e(t)|} = \frac{\varphi(t)}{\varepsilon} \geq \frac{\Phi}{\varepsilon}$
- $\Rightarrow u(t) = -k(t)e(t) \leq -\frac{\Phi\lambda}{2\varepsilon}$
- $\Rightarrow \dot{e}(t) \leq M + \gamma u(t) \leq M - \frac{\gamma\Phi\lambda}{2\varepsilon}$
- Somit folgt aus  $\varepsilon \leq \frac{\gamma\Phi\lambda}{2(\Psi + M)}$  dass  $\dot{e}(t) \leq -\Psi \leq \frac{d}{dt}(1/\varphi(t))$

# Beweisidee: Funnel invariant



Konsequenz: Für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  ist

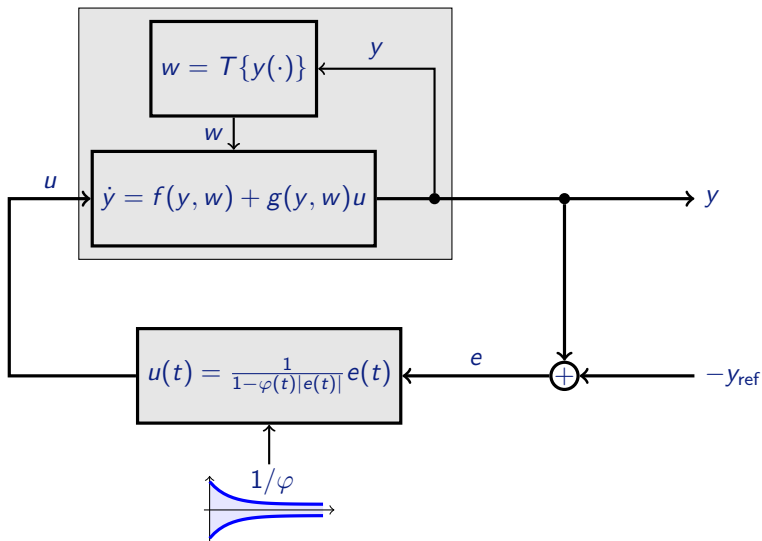
$$\mathcal{F}_\varepsilon := \{ (t, e) \mid |e(t)| < 1/\varphi(t) - \varepsilon \}$$

vorwärts invariant, also

$$(0, e(0)) \in \mathcal{F}_\varepsilon \Rightarrow (t, e(t)) \in \mathcal{F}_\varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

und **endliche Entweichzeit ist ausgeschlossen!**

# Zusammenfassung ursprünglicher Funnel Regler





- 1 Einleitung
- 2 Der Funnel Regler
- 3 Adaptionen des Funnel Reglers

# Eingangsbeschränkungen



$u$  physikalisch beschränkt:  $u(t) \in [-U, U]$  für  $U > 0$

## Beweisanalyse ergibt

$$U \geq \frac{\Psi + M}{\gamma} \Rightarrow \text{Funnell Regler funktioniert}$$

wobei

- $\frac{d}{dt}(1/\varphi(t)) \geq -\Psi$
- $|f(y, w) - \dot{y}_{\text{ref}}| \leq M$
- $g(y, w) \geq \gamma > 0$

## Erinnerung

$y_{\text{ref}}$  beschränkt  $\wedge$   $e$  im Funnell  $\Rightarrow y$  beschränkt  $\Rightarrow w$  beschränkt

siehe auch: Ilchmann, Trenn 2004; Hopfe, Ilchmann, Ryan 2010

# MIMO



## Systemklasse

$m$ -Eingang und  $m$ -Ausgangs-System:

$$\dot{y} = f(y, w, u), \quad w = T\{y\}$$

mit  $T$  ein kausaler BIBO-Operator und

$$\frac{\langle u, f(y, w, u) \rangle}{\|u\|} \rightarrow \infty \quad \text{für } \|u\| \rightarrow \infty.$$

## Theorem (Ilchmann, Ryan, Sangwin 2002)

*Funnel Regler*

$$u(t) = \frac{1}{1 - \varphi(t)\|e(t)\|} e(t)$$

funktioniert, d.h.  $\|e(t)\| < 1/\varphi(t)$ .

Beweisidee: Statt  $\dot{e}$  betrachte  $\frac{d}{dt}(\|e(t)\|^2)$

# Höherer Relativgrad



## Systemklasse

$$\dot{x}_1 = x_2 + f_1(w, y)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + f_2(w, y)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_\rho = h(x_1, x_2, \dots, x_\rho) + f_\rho(w, y) + \gamma u$$

$$w = T\{y\}$$

$$y = x_1$$

## Theorem (Ilchmann, Ryan, Townsend 2006, 2007)

*Funnell Regelung*

$$u(t) = -\gamma_\rho(k(t), e(t), \xi(t)), \quad k(t) = \frac{1}{1 - \varphi(t)^2 \|e(t)\|^2}$$

mit geeigneten (*Backstepping*)  $\gamma_\rho(\cdot)$  und  $\xi(\cdot)$  funktioniert.





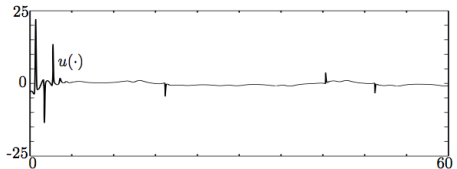
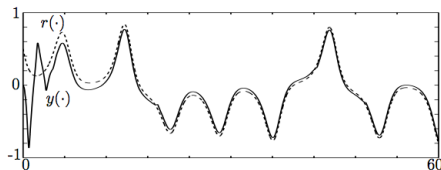
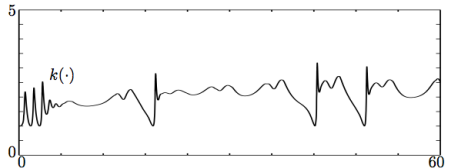
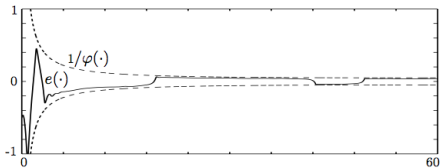
# Beispiel für Relativgrad zwei

Für Relativgrad zwei sieht der Regler wie folgt aus (vereinfacht):

$$u(t) = -k(t)e(t) - (\|e(t)\|^2 + k(t)^2)k(t)^4(1 + \|\xi(t)\|^2)(\xi(t) + k(t)e(t))$$

$$k(t) = 1/(1 - \varphi(t)^2\|e(t)\|^2)$$

$$\dot{\xi}(t) = -\xi(t) + u(t)$$



Aus: Ilchmann, Ryan, Townsend 2007, SICON



# Alternativer Ansatz für Relativgrad zwei

Benutze **zwei** Funnel, einen für den Fehler und einen für die Ableitung des Fehlers

## Einfacheres Regelgesetz

$$u(t) = -k_0(t)^2 e(t) - k_1(t) \dot{e}(t)$$

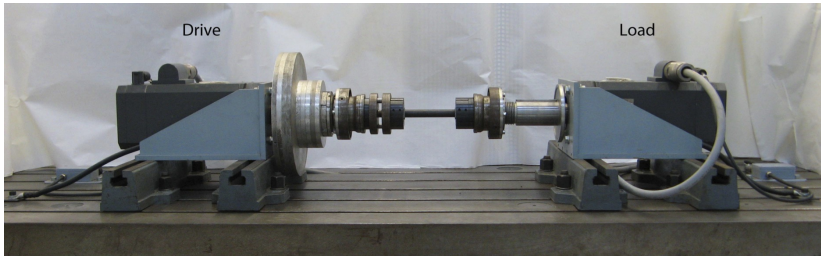
$$k_i(t) = \frac{1}{1/\varphi_i(t) - |e(t)|}, \quad i = 0, 1$$

Systemklasse:  $\ddot{y}(t) = f(p_f(t), T_f\{y, \dot{y}\}(t)) + g(p_g(t), T_g\{y, \dot{y}\}(t))u(t)$

## Theorem (Hackl, Hopfe, Ilchmann, Mueller, Trenn 2012)

*Der obige Funnel Regler für Relativgrad-Zwei-Systeme funktioniert (unter milden Annahmen an  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$ ).*

# Experimentelle Verifikation



$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix} (u(t) + u_L(t) - (Tx_2)(t)), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t),\end{aligned}$$

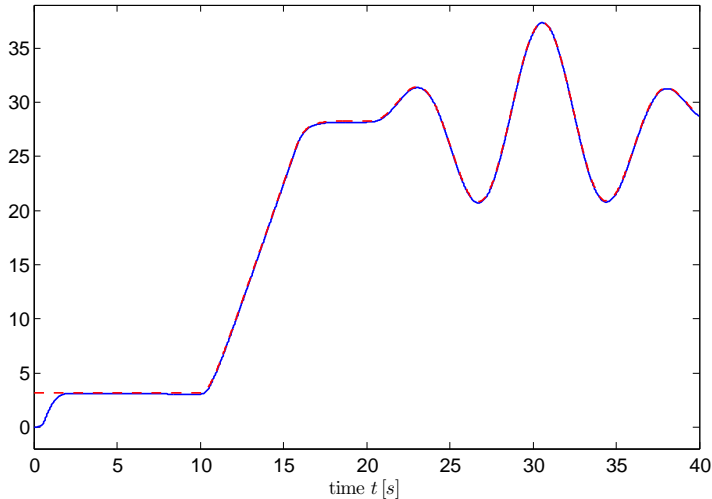
$x_1$ : Winkel der Rotationsmaschine

$x_2 = \dot{x}_1$ : Winkelgeschwindigkeit

$u_L$ : unbekanntes Lastmoment

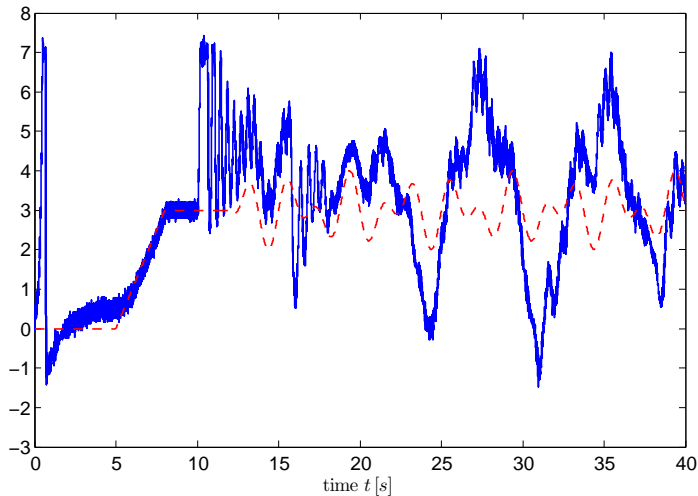
$T : \mathcal{C}(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R})$  Reibungsoperator

# Folgetrajektorienregelung im Experiment



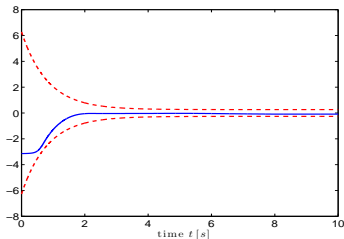
— Gemessener Winkel  $y(t)$  in rad, - - - Referenzwinkel  $y_{ref}(t)$  in rad

# Zugehörige Stellgröße im Experiment

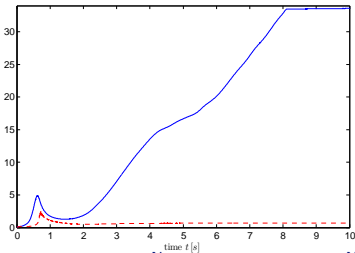


— Stellgröße  $u(t)$  in Nm,    - - - „Unbekannte“ Last  $u_L(t)$  in Nm

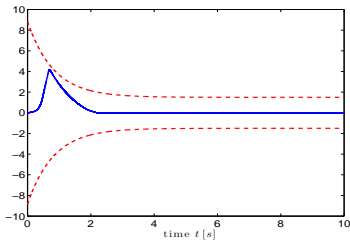
# Experiment: Fehler, Verstärkung, Stellgröße



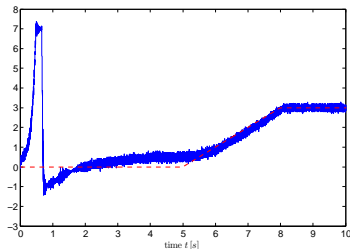
—  $e(t)$  in rad, - - -  $1/\varphi_0(t)$



—  $k_0(t)$  in  $\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$ , - - -  $k_1(t)$  in  $\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$

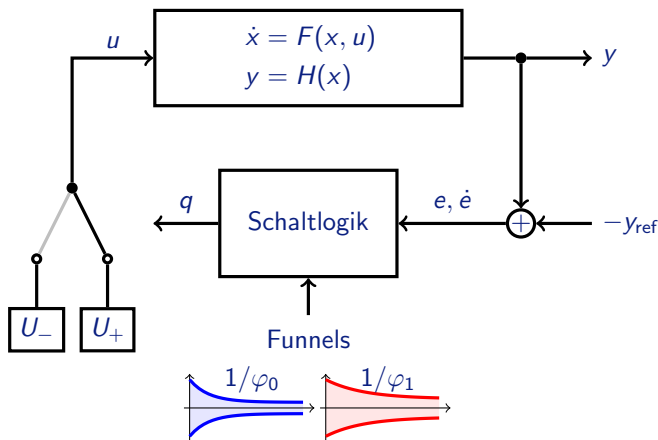


—  $\dot{e}(t)$  in rad/s, - - -  $1/\varphi_1(t)$

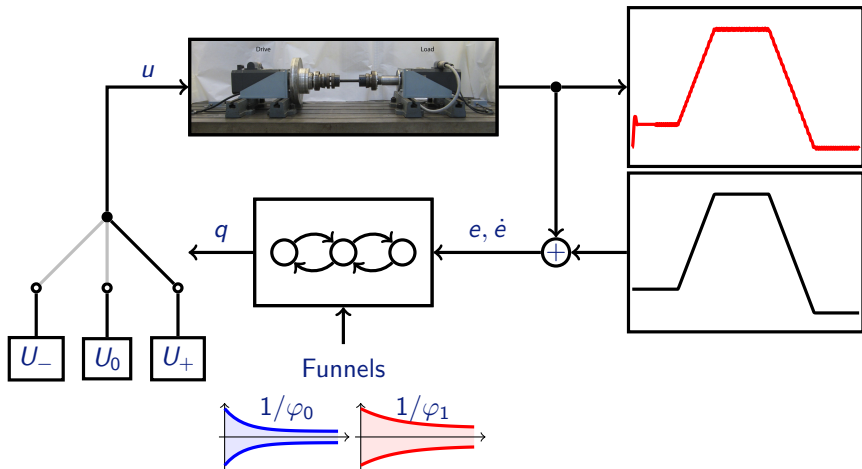


—  $u(t)$  in Nm, - - -  $u_L(t)$  in Nm

## Bang-Bang Funnell-Regelung (Liberzon, Trenn 2010)



# Bang-Bang Funnel Regelung (Liberzon, Trenn 2010)



Diese Variante: Hackl, Trenn 2012



# Historische Zusammenfassung



- vor 2002: High-gain-adaptive Regelung
  - $\dot{k} = \|y\|^2$  (Morse 83; Byrnes,Willems 84; Mareels 84)
  - $\lambda$ -tracking, (Ilchmann,Ryan 94, weitere Arbeiten bis 2002)
- 1991: Der Miller-Davison-„Funnel“
  - nur zwei Fehlerschranken: Überschwingen, endgültige Genauigkeit
  - $k(t)$  stückweise konstant, monoton wachsend
  - Frequenzbereichanalyse
  - Schon für beliebig hohen Relativgrad
- ab 2002: Der Funnel Regler
  - Relativgrad 1, nichtlinear, MIMO (Ilchmann,Ryan,Sangwin 2002)
  - **Eingangsbeschränkungen**, Relativgrad 1, SISO+MIMO (Ilchmann,Trenn 2004; Hopfe,Ilchmann,Ryan 2010)
  - **Höherer Relativgrad**, MIMO, via Backstepping (Ilchmann,Ryan,Townsend 2006,2007)
  - **Eingangsbeschränkungen, Relativgrad 2**, SISO (Liberzon,Trenn 2010 (Bang-Bang); Hackl,Hopfe,Ilchmann,Mueller,Trenn 2012)
  - **Bang-Bang, beliebiger Relativgrad**, SISO (Liberzon,Trenn 2013)