

Der Bang-Bang Funnel Controller

Stephan Trenn (gemeinsam mit Daniel Liberzon)

Institut für Mathematik, Universität Würzburg

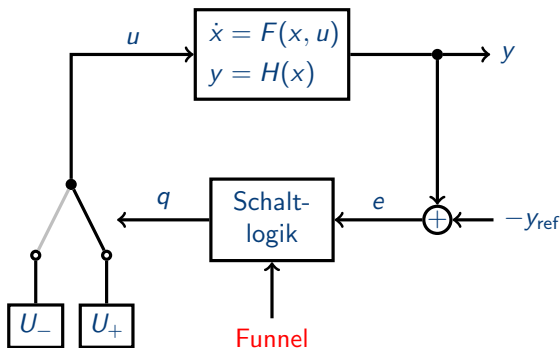
Treffen des GAMM Fachausschusses „Dynamik und
Regelungstheorie“

14. Oktober 2011, Universität Bayreuth



- 1 Einleitung
- 2 Relativgrad Eins
- 3 Höherer Relativgrad

Systemstruktur



Referenzsignal $y_{ref} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichend glatt

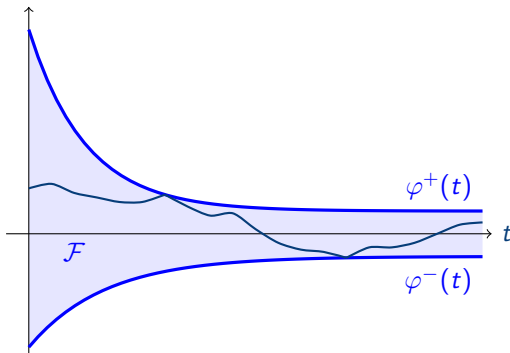
Der Funnel

Ziel der Regelung

Fehler $e := y - y_{\text{ref}}$ verbleibt im *Funnel*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varphi^-, \varphi^+) := \{ (t, e) \mid \varphi^-(t) \leq e \leq \varphi^+(t) \}$$

wobei $\varphi_{\pm} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichend glatt



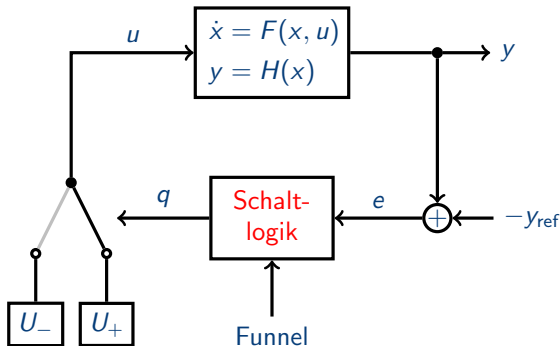
- zeitvariante strikte Fehlerschranke
- transientes Verhalten
- praktische Folgeregelung ($|e(t)| < \lambda$ for $t \gg 0$)

Der Bang-Bang Funnel Controller

Kontinuierlicher Funnel Controller: Eingeführt von Ilchmann et al. in 2002

Neuer Ansatz

Erreiche Regelziel mit **Bang-Bang Regelung**, d.h. $u(t) \in \{U_-, U_+\}$



- 1 Einleitung
- 2 Relativgrad Eins
- 3 Höherer Relativgrad

Relativgrad Eins

Definition (Relativgrad Eins)

$$\begin{array}{l} \dot{x} = F(x, u) \\ y = H(x) \end{array} \quad \cong \quad \begin{array}{l} \dot{y} = f(y, z) + \overbrace{g(y, z)}^{>0} u \\ \dot{z} = h(y, z) \end{array}$$

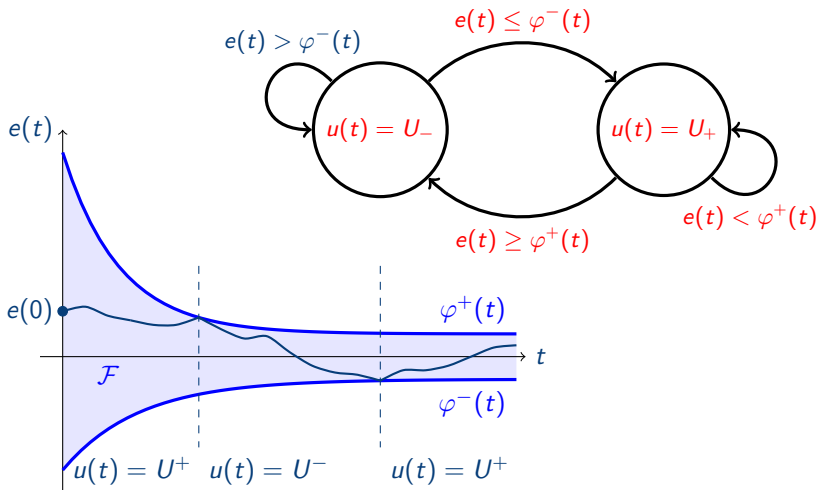
- Strukturelle Annahme
- f, g, h müssen nicht bekannt sein
- zum Prüfen der Machbarkeit braucht man Schranken an f, g, h

Essentielle Eigenschaft der Systemklasse

$$u(t) \lll 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) \lll 0$$

$$u(t) \ggg 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) \ggg 0$$

Schaltlogik



Relativegrad Eins Resultat

Theorem (Bang-Bang Funnel Controller)

*Relativegrad Eins & Funnel & Schaltlogik & **Machbarkeitsbedingungen***

⇒

Bang-Bang Funnel Controller funktioniert:

- *Existenz und Eindeutigkeit von globaler Lösung*
- *Fehler verbleibt immer im Funnel*
- *kein Zeno-Verhalten*

Notwendiges Wissen:

- für Reglerimplementierung
 - Relativgrad (Eins)
 - Signale: Fehler $e(t)$ und Funnelgrenzen $\varphi^\pm(t)$
- um Machbarkeitsbedingungen zu prüfen:
 - Schranken für die Nulldynamik
 - Schranken für f und g
 - Schranken für y_{ref} und \dot{y}_{ref}
 - Schranken für die Funnelgrenzen

- 1 Einleitung
- 2 Relativgrad Eins
- 3 Höherer Relativgrad

Relativgrad r



Definition (Relativgrad r)

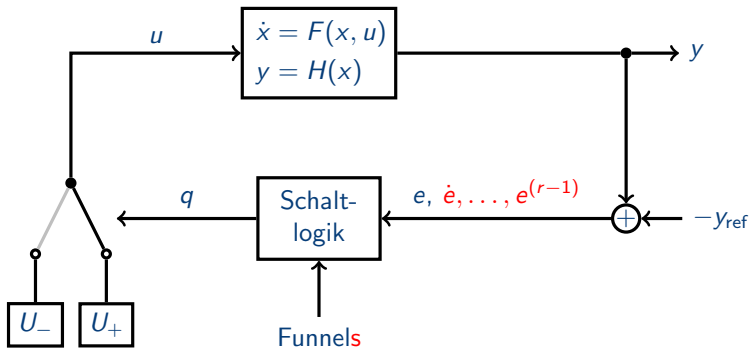
$$\begin{aligned} \dot{x} = F(x, u) \\ y = H(x) \end{aligned} \cong \begin{aligned} y^{(r)} &= f(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}, z) + \overbrace{g(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}, z)}^{>0} u \\ \dot{z} &= h(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}, z) \end{aligned}$$

Wesentliche Eigenschaft

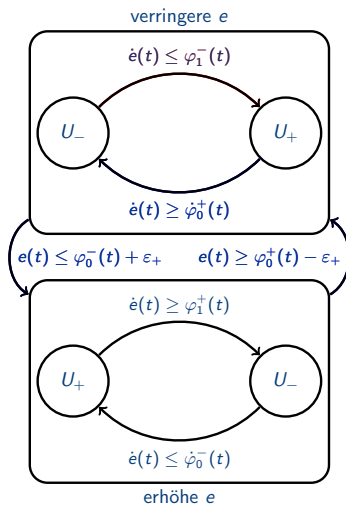
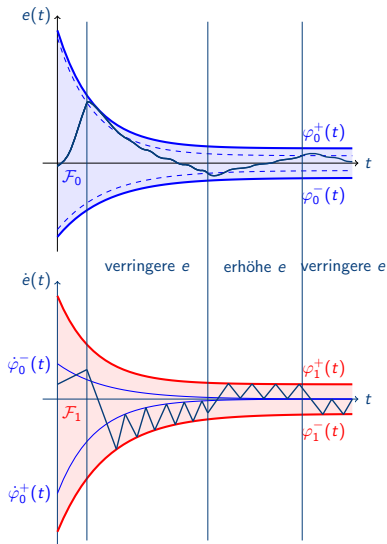
$$u(t) \ll 0 \Rightarrow y^{(r)}(t) \ll 0$$

$$u(t) \gg 0 \Rightarrow y^{(r)}(t) \gg 0$$

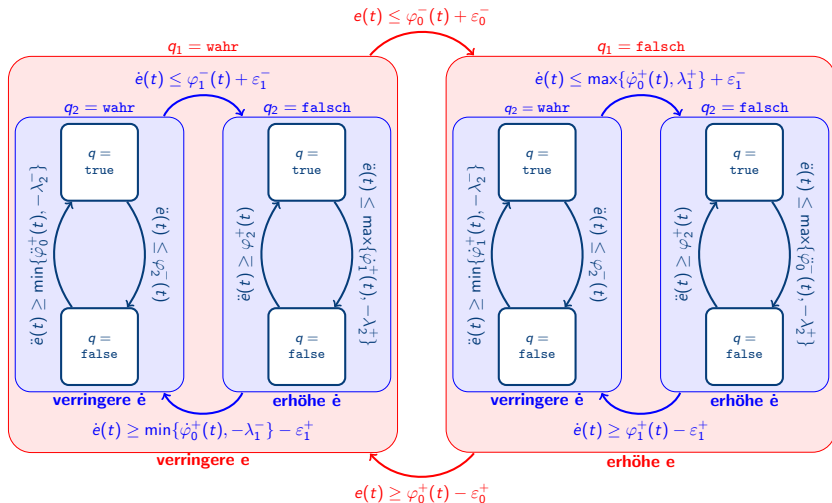
Systemstruktur



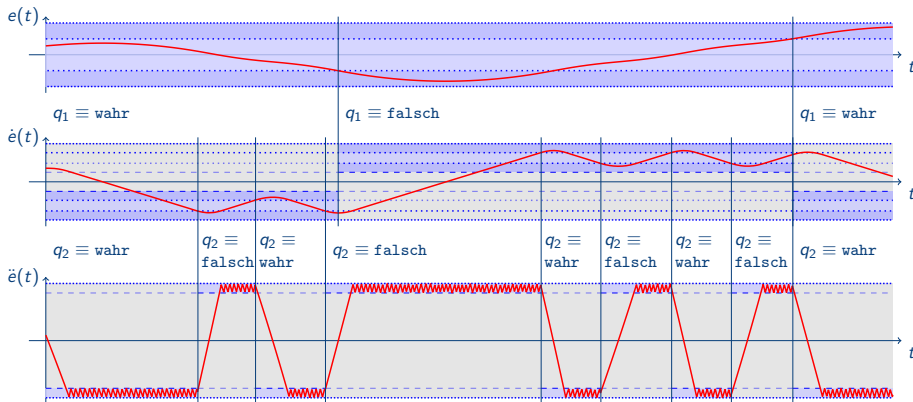
Die Schaltlogik (Relativgrad Zwei)



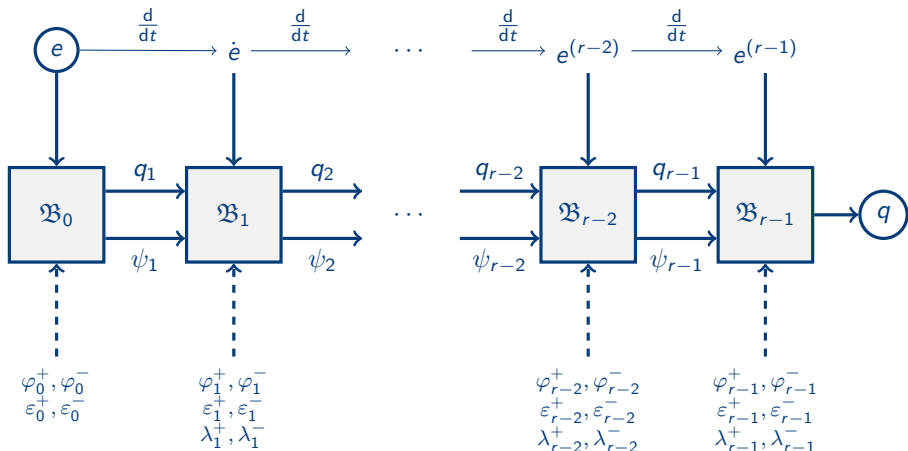
Relativgrad Drei Schaltlogik



Schematisches Lösungsverhalten Relativgrad Drei



Struktur der Schaltlogik



Definition der Blöcke \mathfrak{B}_i

Mithilfe des elementaren Schaltprädikats

$$\mathfrak{S}(e, \bar{e}, \underline{e}, q_{\text{old}}) := [e \geq \bar{e} \vee (e > \underline{e} \wedge q_{\text{old}})] \in \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$$

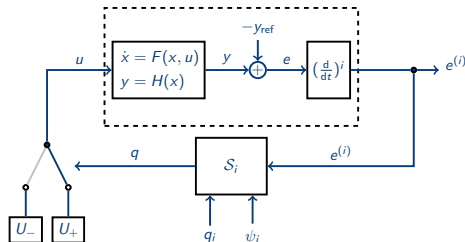
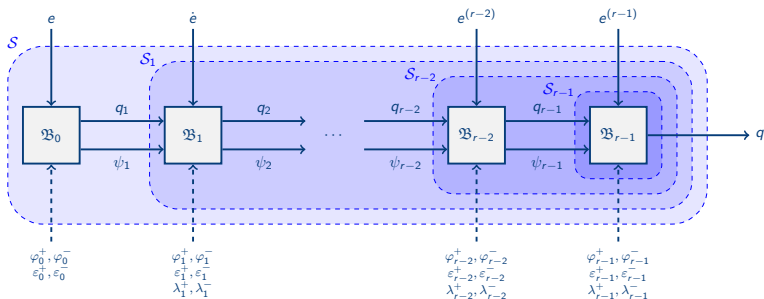
definiere

$$\mathfrak{B}_i : (e^{(i)}, q_i, \psi_i) \mapsto (q_{i+1}, \psi_{i+1}), \quad i = 1, \dots, r-2, \quad \text{mit}$$

$$q_{i+1}(t) = \begin{cases} \mathfrak{S}(e^{(i)}(t), \min\{\psi_i(t), -\lambda_i^-\} - \varepsilon_i^+, \varphi_i^-(t) + \varepsilon_i^-, q_{i+1}(t-)), & q_i(t) = \text{wahr} \\ \mathfrak{S}(e^{(i)}(t), \varphi_i^+(t) - \varepsilon_i^+, \max\{\psi_i(t), \lambda_i^+\} + \varepsilon_i^-, q_{i+1}(t-)), & q_i(t) = \text{falsch} \end{cases}$$

$$\psi_{i+1}(t) = \begin{cases} \dot{\psi}_i(t+), & q_i(t) = \text{wahr} \wedge q_{i+1}(t) = \text{wahr} \\ \dot{\varphi}_i^-(t), & q_i(t) = \text{wahr} \wedge q_{i+1}(t) = \text{falsch} \\ \dot{\varphi}_i^+(t), & q_i(t) = \text{falsch} \wedge q_{i+1}(t) = \text{wahr} \\ \dot{\psi}_i(t+), & q_i(t) = \text{falsch} \wedge q_{i+1}(t) = \text{falsch} \end{cases}$$

Zugrunde liegende Idee



Resultat für höheren Relativgrad

Gegeben:

- Funnelgrenzen φ_0^+ und φ_0^- für Fehler e mit
 - hinreichend glatt, r mal differenzierbar (fast überall)
 - beschränkt mit beschränkten Ableitungen
 - $\liminf_{t \geq 0} \varphi_0^+(t) - \varphi_0^-(t) > 0$
- Schranken für nichtlineare Systemdynamik

Dann:

- man **findet** „passende“
 - Funnelgrenzen φ_i^\pm für $e^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, r-1$
 - Sicherheitsabstände ε_i^\pm , $i = 0, 1, \dots, r-2$
 - gewünschte Anstiege λ_i^\pm , $i = 1, 2, \dots, r$
- so dass für **genügend großes bzw. kleines U^+ und U^-** der **Bang-Bang Funnel Controller funktioniert**, d.h.
 - Existenz und Eindeutigkeit von globalen Lösungen des hybriden Systems
 - Fehler und dessen Ableitungen verbleiben in entsprechenden Funnels
 - kein Zeno-Verhalten