

Stabilität von geschalteten DAEs

Stephan Trenn

Institut für Mathematik, Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Vortrag am Lehrgebiet Technomathematik
Technische Universität Kaiserslautern, 28.03.2011



Inhalt

- 1 Einleitung
 - Systemklasse: Definition und Motivation
 - Beispiele

- 2 Klassische DAEs
 - Lösungen: Konsistenz und zugrundeliegende ODE
 - Lyapunov-Funktionen

- 3 Distributionelle Lösungen für geschaltetet DAEs
 - Erinnerung: Klassische Distributionentheorie
 - Stückweise glatte Distributionen

- 4 Stabilität von geschalteten DAEs
 - Impulsfreiheit
 - Beliebige Schalten
 - Langsames Schalten
 - Kommutativität

Geschaltete lineare DAE (differential algebraic equation)

(swDAE)

$$E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$$

bzw. $E_{\sigma}\dot{x} = A_{\sigma}x$

mit

- Schaltsignal $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$
 - stückweise konstant, rechtsseitig stetig
 - lokal endlich viele Sprünge
- Matrizenpaare $(E_1, A_1), \dots, (E_p, A_p)$
 - $E_p, A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $p = 1, \dots, p$
 - (E_p, A_p) regulär, d.h. $\det(E_p s - A_p) \neq 0$

Motivation und Fragestellung

Wieso geschaltete DAEs $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$?

- ① Modellierung elektrischer Schaltkreise mit Schaltern
- ② DAEs $E\dot{x} = Ax + Bu$ mit geschalteter Rückführung

$$u(t) = F_{\sigma(t)}x(t) \quad \text{oder}$$

$$u(t) = F_{\sigma(t)}x(t) + G_{\sigma(t)}\dot{x}(t)$$

- ③ Approximation zeitvarianter DAEs $E(t)\dot{x} = A(t)x$ durch stückweise konstante DAEs

Fragestellung

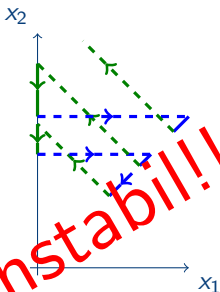
$$E_p \dot{x} = A_p x \text{ asymp. stabil } \forall p \stackrel{?}{\Rightarrow} E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x \text{ asymp. stabil}$$

Beispiel 1: Sprünge und Stabilität

Beispiel 1a:

$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

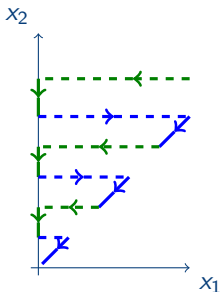
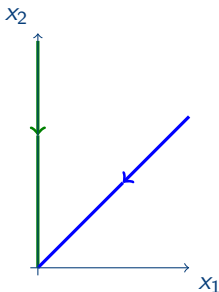
$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$



Beispiel 1b:

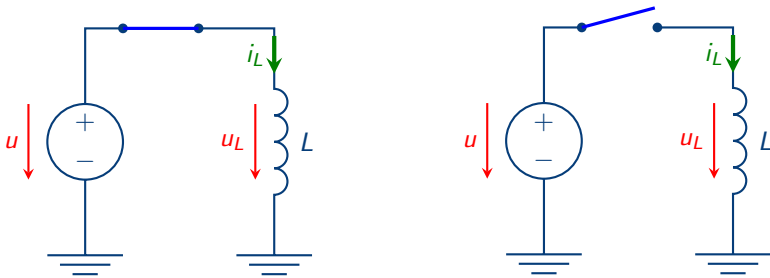
$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$



Bemerkung: $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ ist Lyapunovfunktion für **alle** Teilsystem

Beispiel 2: Impulse in Lösung



Konstanter Eingang:
Induktivitätsgesetz:

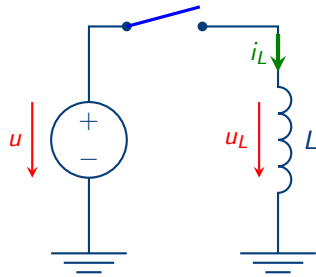
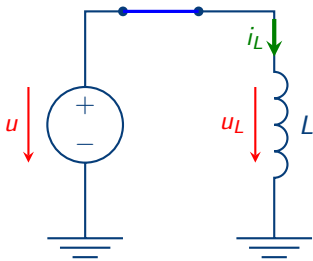
Schalterabhängig: $0 = u_L - u$

$$\dot{u} = 0$$

$$L \frac{d}{dt} i_L = u_L$$

$$0 = i_L$$

Beispiel 2: Impulse in Lösung



$$x = [u, i_L, u_L]^T$$

$$x = [u, i_L, u_L]^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

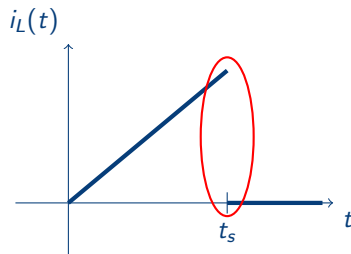
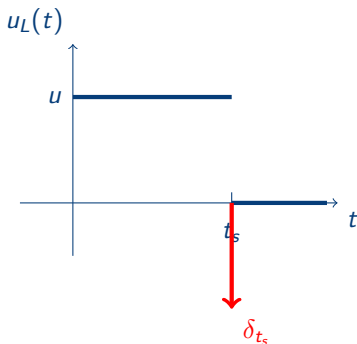
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Lösung des Beispiels

$$L \frac{d}{dt} i_L = u_L, \quad 0 = u_L - u \quad \text{oder} \quad 0 = i_L$$

$$u \text{ konstant, } i_L(0) = 0$$

$$\text{Schalten bei } t_s > 0: \sigma(t) = \begin{cases} 1, & t < t_s \\ 2, & t \geq t_s \end{cases}$$



Lösungen

- Modi haben eingeschränkte Dynamik: **Konsistenzräume**
- Schalten \Rightarrow **inkonsistente Anfangswerte**
- inkonsistente Anfangswerte \Rightarrow **Sprünge in x**

Stabilität

- Gemeinsame Lyapunov-Funktion **reicht nicht**
- Stabilität hängt von **Sprüngen** ab

Impulse

- Schalten \Rightarrow **Dirac-Impulse** in Lösung x
- Dirac-Impuls = unendlicher Peak \Rightarrow **Instabilität**

Inhalt

- 1 Einleitung
 - Systemklasse: Definition und Motivation
 - Beispiele
- 2 Klassische DAEs
 - Lösungen: Konsistenz und zugrundeliegende ODE
 - Lyapunov-Funktionen
- 3 Distributionelle Lösungen für geschaltetet DAEs
 - Erinnerung: Klassische Distributionentheorie
 - Stückweise glatte Distributionen
- 4 Stabilität von geschalteten DAEs
 - Impulsfreiheit
 - Beliebige Schalten
 - Langsames Schalten
 - Kommutativität

Lösungen bei klassischen DAEs

Betrachte $E\dot{x} = Ax$.

Theorem (Weierstraß 1868)

(E, A) regulär \Leftrightarrow

$\exists S, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar:

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right),$$

N nilpotent, $T = [V, W]$

Folgerung (für reguläre (E, A))

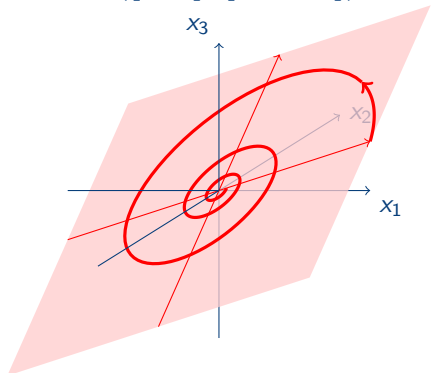
x löst $E\dot{x} = Ax \Leftrightarrow$

$$x(t) = Ve^{Jt}v_0$$

$V \in \mathbb{R}^{n \times n_1}$, $J \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $v_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$.

Konsistenzraum: $\mathfrak{C}_{(E,A)} := \text{im } V$

$$(E, A) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4\pi & -4 & 0 \\ -1 & 4\pi & 0 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \right)$$



$$V = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} -1 & -4\pi \\ \pi & -1 \end{bmatrix}$$

Konsistenzprojektoren

Beobachtung

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

Konsistente Anfangswerte: $\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Beliebiger Anfangswert $\mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi} \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ konsistenter Anfangswert

Definition (Konsistenzprojektoren für reguläre (E, A))

Seien $S, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar mit $(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)$:

$$\Pi_{(E,A)} = T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$$

Bemerkung: $\Pi_{(E,A)}$ lässt sich **einfach** und **direkt** aus (E, A) berechnen

Lyapunov-Funktionen für reguläre (E, A)

Definition (Lyapunov-Funktion für $E\dot{x} = Ax$)

$Q = \bar{Q}^\top > 0$ auf $\mathcal{C}_{(E,A)}$ und $P = \bar{P}^\top > 0$ löse

$$A^\top P E + E^\top P A = -Q \quad (\text{verallgemeinerte Lyapunovgleichung})$$

Lyapunov-Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto (Ex)^\top P Ex$

V monoton fallend entlang Lösungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= (Ex(t))^\top P E \dot{x}(t) + (E \dot{x}(t))^\top P Ex \\ &= x(t)^\top E^\top P A x(t) + x(t)^\top A^\top P Ex(t) \\ &= -x(t)^\top Q x(t) \leq 0 \end{aligned}$$

Theorem (Owens & Debeljkovic 1985)

$E\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil $\Leftrightarrow \exists$ Lyapunov-Funktion

Inhalt

- 1 Einleitung
 - Systemklasse: Definition und Motivation
 - Beispiele

- 2 Klassische DAEs
 - Lösungen: Konsistenz und zugrundeliegende ODE
 - Lyapunov-Funktionen

- 3 Distributionelle Lösungen für geschaltetet DAEs
 - Erinnerung: Klassische Distributionentheorie
 - Stückweise glatte Distributionen

- 4 Stabilität von geschalteten DAEs
 - Impulsfreiheit
 - Beliebige Schalten
 - Langsames Schalten
 - Kommutativität

Distributionen - Überblick

- Verallgemeinerte Funktionen
- Beliebig oft differenzierbar
- Dirac-Impuls δ_0 ist "Ableitung" der Sprungfunktion $\mathbb{1}_{[0,\infty)}$

Zwei verschiedene formale Ansätze

- 1 Funktionalanalytisch: Dualraum des Raumes der Testfunktionen (L. Schwartz 1950)
- 2 Axiomatisch: Raum aller "Ableitungen" stetiger Funktionen (J. Sebastião e Silva 1954)

Distributionen - formal

Definition (Testfunktionen)

$$\mathcal{C}_0^\infty := \{ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist glatt mit kompakten Träger} \}$$

Definition (Distributionen)

$$\mathbb{D} := \{ D : \mathcal{C}_0^\infty \rightarrow \mathbb{R} \mid D \text{ ist linear und stetig} \}$$

Definition (Reguläre Distributionen)

$$f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}): \quad f_{\mathbb{D}} : \mathcal{C}_0^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt \in \mathbb{D}$$

Definition (Ableitung)

$$D'(\varphi) := -D(\varphi')$$

Dirac-Impuls bei $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\delta_{t_0} : \mathcal{C}_0^\infty \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \varphi(t_0)$$

Multiplikation mit Funktionen

Definition (Multiplikation mit glatten Funktionen)

$$\alpha \in C^\infty : (\alpha D)(\varphi) := D(\alpha\varphi)$$

$$\text{(swDAE)} \quad E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$$

Koeffizienten nicht glatt

Problem: $E_\sigma, A_\sigma \notin C^\infty$

Beobachtung:

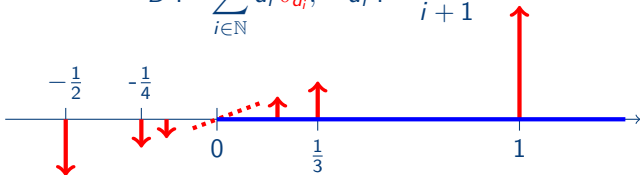
$$E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{Z} : (E_{p_i} \dot{x})_{[t_i, t_{i+1})} = (A_{p_i} x)_{[t_i, t_{i+1})}$$
$$i \in \mathbb{Z} : \sigma_{[t_i, t_{i+1})} \equiv p_i$$

Neue Frage: **Einschränkung von Distributionen auf Intervalle**

Eine nicht einschränkbare Distribution

Betrachte folgende (wohldefinierte!) Distribution:

$$D := \sum_{i \in \mathbb{N}} d_i \delta_{d_i}, \quad d_i := \frac{(-1)^i}{i+1}$$



Einschränkung sollte ergeben

$$D_{(0,\infty)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} d_{2k} \delta_{d_{2k}}$$

Wähle $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ mit $\varphi_{[0,1]} \equiv 1$:

$$D_{(0,\infty)}(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{N}} d_{2k} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2k+1} = \infty$$

Dilemma



Geschaltete DAEs

- Beispiele: Distributionelle Lösungen
- Multiplikation mit nicht-glaten Koeffizienten
- Oder: Einschränkung auf Intervalle

Distributionen

- Distributionelle Einschränkung unmöglich
- Multiplikation mit nicht-glaten Koeffizienten unmöglich
- *Anfangswertprobleme können nicht formuliert werden*

Zugrundeliegendes Problem

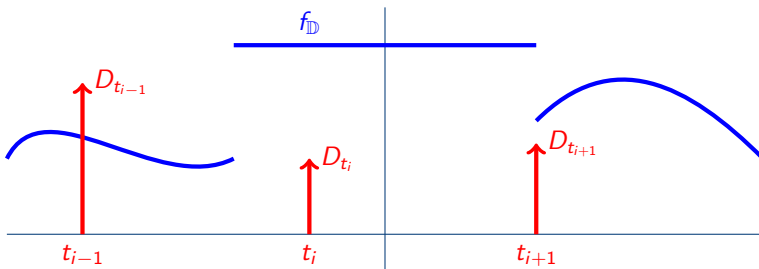
Raum der Distributionen zu groß.

Stückweise glatte Distributionen

Definiere einen passenden, kleineren Raum:

Definition (Stückweise glatte Distributionen $\mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty}$)

$$\mathbb{D}_{\text{pw}C^\infty} := \left\{ f_{\mathbb{D}} + \sum_{t \in T} D_t \mid \begin{array}{l} f \in C_{\text{pw}}^\infty, \\ T \subseteq \mathbb{R} \text{ lokal endlich,} \\ \forall t \in T : D_t = \sum_{i=0}^{n_t} a_i^t \delta_t^{(i)} \end{array} \right\}$$



Eigenschaften von $\mathbb{D}_{pw}C^\infty$

- C_{pw}^∞ "⊆" $\mathbb{D}_{pw}C^\infty$
- $D \in \mathbb{D}_{pw}C^\infty \Rightarrow D' \in \mathbb{D}_{pw}C^\infty$
- Einschränkung $\mathbb{D}_{pw}C^\infty \rightarrow \mathbb{D}_{pw}C^\infty$, $D \mapsto D_M$ für alle Intervalle $M \subseteq \mathbb{R}$ wohldefiniert
- Multiplikation mit C_{pw}^∞ -Funktionen wohldefiniert
- links- und rechtsseitige Auswertung bei $t \in \mathbb{R}$: $D(t-), D(t+)$
- Impuls bei $t \in \mathbb{R}$: $D[t]$

$$(\text{swDAE}) \quad E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$$

Anwendung auf (swDAE)

x löst (swDAE) $:\Leftrightarrow x \in (\mathbb{D}_{pw}C^\infty)^n$ und (swDAE) gilt in $\mathbb{D}_{pw}C^\infty$

Zwischenstand: Probleme und Lösungen



(swDAE) $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$

- 1 Stabilitätskriterium für einzelne DAEs $E_p \dot{x} = A_p x$
⇒ **Lyapunov-Funktionen**
- 2 **Keine klassischen Lösungen**
⇒ **Erlaube Sprünge** in Lösungen
- 3 Wie „springt“ inkonsistenter Anfangswert auf konsistenten?
⇒ **Konsistenzprojektoren** $\Pi_{(E_1, A_1)}, \dots, \Pi_{(E_N, A_N)}$
- 4 Differentiation von Sprüngen
⇒ Raum der **Distributionen** als Lösungsraum
- 5 **Multiplikation mit nicht-glaten Koeffizienten**
⇒ Raum der **stückweise glatten Distributionen**
⇒ Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
⇒ Deutlich größere Systemklasse kann betrachtet werden

Inhalt

- 1 Einleitung
 - Systemklasse: Definition und Motivation
 - Beispiele

- 2 Klassische DAEs
 - Lösungen: Konsistenz und zugrundeliegende ODE
 - Lyapunov-Funktionen

- 3 Distributionelle Lösungen für geschaltetet DAEs
 - Erinnerung: Klassische Distributionentheorie
 - Stückweise glatte Distributionen

- 4 **Stabilität von geschalteten DAEs**
 - **Impulsfreiheit**
 - **Beliebiges Schalten**
 - **Langsames Schalten**
 - **Kommutativität**

Asymptotische Stabilität und impulsfreie Lösungen

Definition (Asymptotische Stabilität einer geschalteten DAE)

(swDAE) asymptotisch stabil : $\Leftrightarrow x$ ist **impulsfrei** und $x \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$

Im folgenden $\Pi_p := \Pi_{(E_p, A_p)}$ Konsistenzprojektor zu (E_p, A_p)

Impulsfreiheitsbedingung

(IFB): $\forall p, q \in \{1, \dots, N\} : E_p(I - \Pi_p)\Pi_q = 0$

Theorem (T. 2009)

(IFB) \Leftrightarrow Alle Lösungen von $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$ sind impulsfrei $\forall \sigma$

Stabilität unter beliebigem Schalten

Betrachte **(swDAE)** mit zusätzlicher Annahme:

($\exists \mathbf{V}_p$): $\forall p \in \{1, \dots, N\} \exists$ Lyapunov-Funktion V_p für (E_p, A_p)

d.h. jede DAE $E_p \dot{x} = A_p x$ ist asymp. stabil

Lyapunov-Sprung-Bedingung

(LSB): $\forall p, q = 1, \dots, N \forall x \in \mathcal{C}_{(E_q, A_q)} : V_p(\Pi_p x) \leq V_q(x)$

Theorem (Liberzon & T. 2009)

(IFB) \wedge ($\exists \mathbf{V}_p$) \wedge (LSB) \Rightarrow (swDAE) asymptotisch stabil

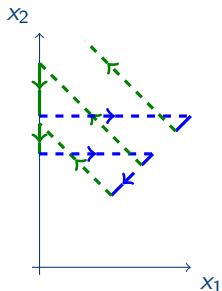
Beispiele 1a und 1b erfüllen **(IFB)** und **($\exists \mathbf{V}_p$)**, aber nur 1b erfüllt **(LSB)**

Beispiel 1 Erinnerung

Beispiel 1a:

$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

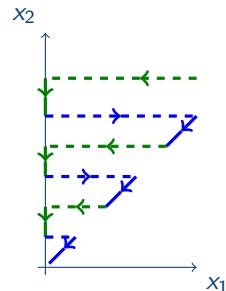
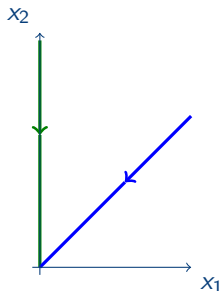
$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$



Beispiel 1b:

$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$



Langsames Schalten

Betrachte die Menge der langsamen Schaltsignale, $\tau > 0$:

$$\Sigma^\tau := \left\{ \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \{1, \dots, N\} \left| \begin{array}{l} \forall \text{ Schaltzeiten} \\ t_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z} : \\ t_{i+1} - t_i \geq \tau \end{array} \right. \right\}.$$

Theorem (Liberzon & T. 2009)

$\exists \tau > 0 \forall \sigma \in \Sigma^\tau: \text{(IFB)} \wedge (\exists \mathbf{V}_p) \Rightarrow \text{(swDAE) asymptotisch stabil}$

Nochmal zur Erinnerung:

(IFB): $\forall p, q \in \{1, \dots, N\} : E_p(I - \Pi_{(E_p, A_p)})\Pi_{(E_q, A_q)} = 0$

Wie gesagt, Beispiel 1a und 1b erfüllen beide **(IFB)** und **($\exists \mathbf{V}_p$)**

\Rightarrow Beide Beispiele asymptotisch stabil unter **langsamen Schalten**

Inhalt



- 1 Einleitung
 - Systemklasse: Definition und Motivation
 - Beispiele
- 2 Klassische DAEs
 - Lösungen: Konsistenz und zugrundeliegende ODE
 - Lyapunov-Funktionen
- 3 Distributionelle Lösungen für geschaltetet DAEs
 - Erinnerung: Klassische Distributionentheorie
 - Stückweise glatte Distributionen
- 4 **Stabilität von geschalteten DAEs**
 - Impulsfreiheit
 - Beliebiges Schalten
 - Langsames Schalten
 - **Kommutativität**

Kommutativität und Stabilität bei geschalteten ODEs

Theorem (Narendra und Balakrishnan 1994)

Betrachte geschalte ODE

(swODE) $\dot{x} = A_{\sigma}x$

mit A_p Hurwitz, $p \in \{1, 2, \dots, p\}$ und *kommutierenden* A_p , d.h.

$$[A_p, A_q] := A_p A_q - A_q A_p = 0 \quad \forall p, q \in \{1, 2, \dots, p\} \quad (\text{K})$$

 \Rightarrow **(swODE)** *asymptotisch stabil* $\forall \sigma$.Beweisidee: Betrachte Schaltzeiten $t_0 < t_1 < \dots < t_k < t$ und $p_i := \sigma(t_i+)$, dann

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A_{p_k}(t-t_k)} e^{A_{p_{k-1}}(t_k-t_{k-1})} \dots e^{A_{p_1}(t_2-t_1)} e^{A_{p_0}(t_1-t_0)} x_0 \\ &\stackrel{(\text{K})}{=} e^{A_1 \Delta t_1} e^{A_2 \Delta t_2} \dots e^{A_p \Delta t_p} x_0 \end{aligned}$$

und $\Delta t_p \rightarrow \infty$ für mindestens ein p und $t \rightarrow \infty$.

Verallgemeinerung auf (swDAE)

$$\text{(swDAE)} \quad E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$$

Verallgemeinerung - Fragen

- Welche Matrizen müssen kommutieren?
- Was passiert mit den Sprüngen?

$$\text{Beispiel 1a: } (E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right), \quad (E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$[A_1, A_2] = 0$, aber instabiles Verhalten möglich

Die Matrix A^{diff}

Sei (E, A) regulär mit $(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)$, N nilpotent

Erinnerung Konsistenzprojektor: $\Pi_{(E,A)} = T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$

Definition (Differential-, „Projektor“)

$$\Pi_{(E,A)}^{\text{diff}} = T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S$$

Satz (Dynamik der DAE)

x löst $E\dot{x} = Ax \Rightarrow \dot{x} = \Pi_{(E,A)}^{\text{diff}} Ax$

$$A^{\text{diff}} := \Pi_{(E,A)}^{\text{diff}} A = T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$$

Kommutativitätsbedingung

Betrachte wieder geschaltete DAE:

$$(\text{swDAE}) \quad E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$$

Theorem (Liberzon, T., Wirth 2011)

$(\text{IFB}) \wedge (\exists V_p) \wedge$

$$[A_p^{\text{diff}}, A_q^{\text{diff}}] = 0 \quad \forall p, q \in \{1, 2, \dots, p\} \quad ((K))$$

\Rightarrow **(swDAE)** ist asymptotisch stabil $\forall \sigma$ und \exists *gemeinsame Lyapunovfunktion* mit

$$V(\Pi_p x) \leq V(x) \quad \forall x \quad \forall p$$

Interessant: Keine zusätzliche Bedingung an Sprünge!

Beweisskizze

Beweisidee: Aus

$$[A_p^{\text{diff}}, A_q^{\text{diff}}] = 0 \quad \forall p, q \in \{1, 2, \dots, p\} \quad (\text{K})$$

folgt auch

$$[\Pi_p, A_q^{\text{diff}}] = 0 \quad \wedge \quad [\Pi_p, \Pi_q] = 0 \quad \wedge \quad [A_p^{\text{diff}}, \Pi_q] = 0.$$

Betrachte Schaltzeiten $t_0 < t_1 < \dots < t_k < t$ und $p_i := \sigma(t_i+)$, dann

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A_{p_k}^{\text{diff}}(t-t_k)} \Pi_{p_k} e^{A_{p_{k-1}}^{\text{diff}}(t_k-t_{k-1})} \Pi_{p_{k-1}} \dots e^{A_{p_1}^{\text{diff}}(t_2-t_1)} \Pi_{p_1} e^{A_{p_0}^{\text{diff}}(t_1-t_0)} \Pi_{p_0} x_0 \\ &\stackrel{(\text{K})}{=} e^{A_1^{\text{diff}} \Delta t_1} \Pi_1 e^{A_2^{\text{diff}} \Delta t_2} \Pi_2 \dots e^{A_p^{\text{diff}} \Delta t_p} \Pi_p x_0 \end{aligned}$$

und $\Delta t_p \rightarrow \infty$ für mindestens ein p und $t \rightarrow \infty$.

Konstruktion Lyapunovfunktion

$$[A_1^{\text{diff}}, A_2^{\text{diff}}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists T \text{ invertierbar:}$$

$$T A_1^{\text{diff}} T^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T A_2^{\text{diff}} T^{-1} = \begin{bmatrix} A_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} \text{ Hurwitz und } [A_{11}, A_{21}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists P_1, P_2, P_3 \text{ s.p.d.:}$$

$$\begin{aligned} A_{11}^\top P_1 + P_1 A_{11} < 0 & \quad \wedge \quad A_{21}^\top P_1 + P_1 A_{21} < 0 \\ A_{12}^\top P_2 + P_2 A_{12} < 0 \\ A_{33}^\top P_3 + P_3 A_{22} < 0 \end{aligned}$$

 \Rightarrow

$$P = T^{-\top} \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} T^{-1}$$

liefert gesuchte Lyapunovfunktion $V(x) = x^\top P x$.

Zusammenfassung

Wir betrachteten geschaltete DAEs

(swDAE) $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$

- Lösungstheorie
 - Keine klassischen Lösungen: Sprünge und Impulse
 - Impulsfreiheitsbedingung
 - Sprünge weiterhin erlaubt
- Hinreichende Stabilitätsbedingung
 - Multiple Lyapunovfunktionen mit Sprungbedingung
 - Langsames Schalten
 - Kommutativität (insb. Lyapunovfunktionskonstruktion)
- In Arbeit: Allgemeine inverse Lyapunov-Resultate



S. Trenn: Distributional differential algebraic equations.
Dissertation, Universitätsverlag Ilmenau, Ilmenau, Aug. 2009.



D. Liberzon und S. Trenn: On stability of linear switched differential algebraic equations.
In Proc. IEEE 48th Conf. on Decision and Control, Shanghai, Seiten 2156–2161, Dez. 2009.



D. Liberzon, S. Trenn und F. Wirth: Commutativity and asymptotic stability for linear switched DAEs.
Zur Veröffentlichung eingereicht.