Differential-algebraische Gleichungen: Ein distributioneller Ansatz

Stephan Trenn

Institut für Mathematik, Technische Universität Ilmenau

Oberseminar zu Differentialgleichungen,
Universiät Augsburg, 14.07.2009

Besonderheiten bei DAEs

Betrachte: $E\dot{x} = Ax + f$

Unterschiede zu ODEs:

- Nichtexistenz von Lösungen
- Uneindeutigkeit der Lösungen
- Existenz der Lösungen abhängig von Glattheit der Inhomogenität
- Inkonsistente Anfangswerte

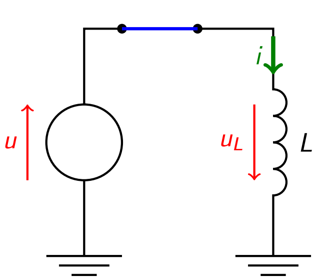
Regularität

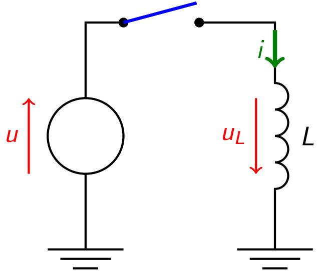
(E, A) regulär $\Leftrightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Probleme

Nichtglatte Inhomogenitäten und inkonsistente Anfangswerte

Elektrischer Schaltkreis mit Spule





$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Inhalt

Distributionentheorie informell

Distributionen - Überblick

- Verallgemeinerte Funktionen
- Beliebig oft differenzierbar
- Dirac-Impuls δ_0 ist „Ableitung" der Sprungfunktion $\mathbb{1}_{[0,\infty)}$

Grundsätzlich zwei formale Zugänge

1. Funktionalanalytisch: Dualraum eines Raumes von Testfunktionen (L. Schwartz 1950)
2. Axiomatisch: Raum aller „Ableitungen" von stetigen Funktionen (J.S. Silva 1954)

Distributionen - formal

Definition (Testfunktionen)

$\mathcal{C}_0^\infty := \{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist glatt mit kompakten Träger } \}$

Definition (Distributionen)

$\mathbb{D} := \{ D : \mathcal{C}_0^\infty \to \mathbb{R} \mid D \text{ ist linear und stetig } \}$

Definition (Reguläre Distributionen)

$f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$: $\quad f_{\mathbb{D}} : \mathcal{C}_0^\infty \to \mathbb{R}, \ \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f(t) \mathrm{d}t \in \mathbb{D}$

Definition (Ableitung)

$D'(\varphi) := -D(\varphi')$

Dirac Impuls in $t_0 \in \mathbb{R}$

$\delta_{t_0} : \mathcal{C}_0^\infty \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \varphi(t_0)$

Distributionelle Lösungen

Distributionelle Lösungen $\Rightarrow$ Alle Probleme gelöst?

Nichtglatte Inhomogenitäten: OK.

Inkonsistente Anfangswerte: ???

Keine Funktionsauswertung möglich

x Distribution $\quad\Rightarrow\quad x(t_0)$ nicht definiert

Anfangstrajektorienproblem

Gegeben: $x^0 \in \mathbb{D}^n$ (distributionelle) Anfangstrajektorie, $t_0 \in \mathbb{R}$
Gesucht: $x \in \mathbb{D}^n$ mit

$$x_{(-\infty,t_0)} = x^0_{(-\infty,t_0)}$$
$$(E\dot{x})_{[t_0,\infty)} = (Ax+f)_{[t_0,\infty)}$$

Distributionelle Einschränkung

Distributionelle Einschränkung:

$$\{\ M \subseteq \mathbb{R} \mid M \text{ Intervall }\ \} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad (M, D) \mapsto D_M$$

wobei für jedes Intervall $M \subseteq \mathbb{R}$ gelte

1. $D \mapsto D_M$ ist eine Projektion (linear und idempotent)
2. $\forall f \in L_{1,\text{loc}}: \quad (f_{\mathbb{D}})_M = (f_M)_{\mathbb{D}}$
3. $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty: \quad \left[\begin{array}{ccc} \operatorname{supp}\varphi \subseteq M & \Rightarrow & D_M(\varphi) = D(\varphi) \\ \operatorname{supp}\varphi \cap M = \emptyset & \Rightarrow & D_M(\varphi) = 0 \end{array}\right]$
4. $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkt, $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$:

$$D_{M_1 \cup M_2} = D_{M_1} + D_{M_2}, \quad D_M = \sum_{i \in \mathbb{N}} D_{M_i}, \quad (D_{M_1})_{M_2} = 0$$

Theorem

Eine solche distributionelle Einschränkung existiert nicht.

Dilemma und Lösung

Inkonsistenete Anfangswerte

- Tauchen in praktischen Beispielen auf
- Ergeben distributionelle Lösungen

Distributionen

- Distributionelle Einschränkung nicht möglich
- Anfangswertprobleme können nicht formuliert werden

Zugrundeliegendes Problem

Raum der Distributionen zu groß.

Lösung: Betrachte kleineren Distributionenraum $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$

Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$

- $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{pw}}$ „$\subseteq$“ $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$
- $D \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty} \Rightarrow D' \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$
- Einschränkung $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty} \to \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty},\ D \mapsto D_M$ für alle Intervalle $M \subseteq \mathbb{R}$ wohldefiniert
- Multiplikation mit $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{pw}}$-Funktionen wohldefiniert
- Links- und rechtsseitige Auswertung an $t \in \mathbb{R}$: $D(t-), D(t+)$
- Impuls bei $t \in \mathbb{R}$: $D[t]$

Inhalt

Nochmal konstante Koeffizienten

Betrachte: $E\dot{x} = Ax + f$ mit konstanten Koeffizienten $E, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Theorem (Regularität)

(E, A) *regulär* $\Leftrightarrow$

- $\forall x^0 \in (\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty})^n$ *(distributionellen) Anfangtrajektorien*
- $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ *Anfangszeiten*
- $\forall f \in (\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty})^m$ *Inhomogenitäten*

$\exists! x \in (\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty})^n$:

$$x_{(-\infty,t_0)} = x^0_{(-\infty,t_0)}$$
$$(E\dot{x})_{[t_0,\infty)} = (Ax + f)_{[t_0,\infty)}$$

Zeitvariante Koeffizienten

Betrachte: $E(\cdot)\dot{x} = A(\cdot)x + f$ mit $E(\cdot), A(\cdot) \in (\mathcal{C}_{\mathrm{pw}}^\infty)^{m\times n}$

Multiplikation mit Funktionen?

Wichtige Spezialfälle:

- Geschaltete DAEs, d.h. stückweise konstante Koeffizienten
- Analytische Koeffizienten (nullteilerfrei)

Punktweise Regularität

Regularität von $\big(E(t), A(t)\big)$ für $t \in \mathbb{R}$ i.A. nicht aussagekräftig.

Definition Regularität für zeitvariante DAEs

Definition (Regularität)

$\big(E(\cdot), A(\cdot)\big)$ regulär $\Leftrightarrow$

- $\forall x^0 \in (\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty})^n$ (distributionellen) Anfangtrajektorien
- $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ Anfangszeiten
- $\forall f \in (\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty})^m$ Inhomogenitäten

$\exists! x \in (\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty})^n$:

$$x_{(-\infty,t_0)} = x^0_{(-\infty,t_0)}$$
$$\big(E(\cdot)\dot{x}\big)_{[t_0,\infty)} = \big(A(\cdot)x + f\big)_{[t_0,\infty)}$$

Theorem (Regularität von geschalteten DAEs)

Geschaltete DAE ist regulär (für alle Schaltsignale)
$\Leftrightarrow$ *Jedes Subsystem ist regulär*

Weiterführende Resultate

- Notwendige Bedingungen für Regularität (Ableitungen der Koeffizienten spielen Rolle)
- Hinreichende Bedingung für impulsfreie Lösungen bei geschalteten DAEs
- Lyapunov-Bedingungen für Stabilität von geschalteten DAEs

Betrachtung von Äquivalenztransformationen:

$$(E, A) \quad \cong \quad (SET, SAT - SET')$$

- Normalformen
- T' führt zu Distributionen auch in den Koeffizientenmatrizen
- Multiplikation von Distributionen, z.B. $\delta^2 = 0$

Zusammenfassung

- DAEs mit konstanten Koeffizienten
  - Nichtexistenz und Uneindeutigkeit von Lösungen
  - Inkonsistente Anfangswerte
  - Distributionelle Lösungen
- Probleme von distributionellen Lösungen
  - Einschränkung auf Intervalle nicht möglich
  - Auswertung an bestimmten Zeitpunkten nicht möglich
  - Idee: Betrachte stückweise glatte Distributionen
- Einige Resultate zur Lösungstheorie