Passivität und maximal-monotone Operatoren

Stephan Trenn

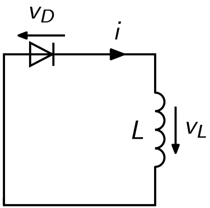
AG Technomathematik, TU Kaiserslautern

gemeinsame Arbeit mit
K. Camlibel (U Groningen, NL), L. Iannelli (U Sannio in Benevento, IT), A. Tanwani (LAAS-CNRS, Toulouse, FR)

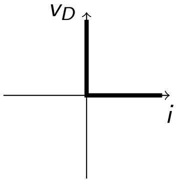
Treffen des GAMM-Fachausschuss „Dynamik und Regelungstheorie“
TU Bergakademie Freiberg, 13.05.2016, 9:30–09:50

TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Motivation: Elektrische Schaltkreise mit idealen Dioden



$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i = L v_D$$
$$0 \leq i \perp v_D \geq 0$$



Lin. Komplementaritätssysteme

$$\dot{x} = Ax + Bz$$
$$w = Cx + Dz$$
$$0 \leq z \perp w \geq 0$$

Theorem (Camlibel et al. 1999)

(A, B, C, D) *passiv*
$$\Downarrow$$
Existenz & Eindeutigkeit von Lösungen

Umschreiben: $0 \leq i \perp v_D \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_D \in \begin{cases} \emptyset, & i < 0, \\ [0, \infty), & i = 0, \\ \{0\}, & i > 0. \end{cases}$

Mengenwertige Nebenbedingung

$$\dot{x} = Ax + Bz$$
$$w = Cx + Dz$$
$$w \in \mathcal{F}(-z)$$

Theorem (Camlibel et al. 2015)

(A,B,C,D) *passiv und*
$\mathcal{F}$ *maximal-monoton*
$$\Downarrow$$
Existenz & Eindeutigkeit von Lösungen

Fragestellung

Verallgemeinerung auf DAEs

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bz \\ w &= Cx + Dz \\ w &\in \mathcal{F}(-z) \end{aligned}$$

(E, A, B, C, D) passiv & $\mathcal{F}$ maximal-monoton $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Maximal-monotone Operatoren

Definition (Monotonie)

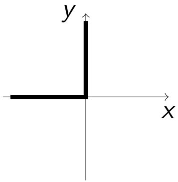
$\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ ist monoton $\quad :\Leftrightarrow$

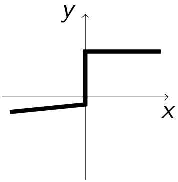
$$\forall y_1 \in \mathcal{M}(x_1),\; y_2 \in \mathcal{M}(x_2): \quad \langle y_2 - y_1, x_2 - x_1 \rangle \geq 0$$

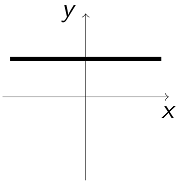
Ein monotones $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ ist maximal $\quad :\Leftrightarrow$

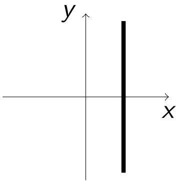
$$\forall \widetilde{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M}: \quad \widetilde{\mathcal{M}} \text{ ist nicht monoton}$$

Beispiele für skalare maximal-monotone Operatoren:









Maximal-monotone Operatoren

Definition (Monotonie)

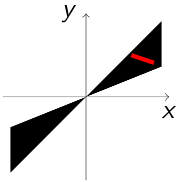
$\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ ist monoton $\quad :\Leftrightarrow$

$$\forall y_1 \in \mathcal{M}(x_1),\; y_2 \in \mathcal{M}(x_2) : \quad \langle y_2 - y_1, x_2 - x_1 \rangle \geq 0$$

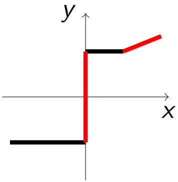
Ein monotones $\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ ist maximal $\quad :\Leftrightarrow$

$$\forall \widetilde{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M} : \quad \widetilde{\mathcal{M}} \text{ ist nicht monoton}$$

Nichtmonotones Beispiel:



Nichtmaximales Beispiel:



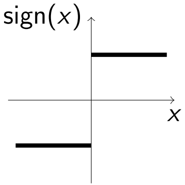
Maximal-monotone Operatoren und Differentialinklusionen

Theorem (Brezis 1973)

$\mathcal{M} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *maximal-monoton* $\Rightarrow$ $\dot{x} \in -\mathcal{M}(x)$, $x(0) = x_0 \in \operatorname{dom}(\mathcal{M})$ *ist eindeutig lösbar*

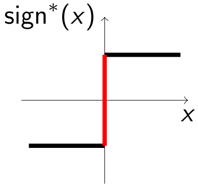
Keine globale Lösung:

$$\dot{x} = -\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$



Globale Lösungen (Philipov-Lösungen)

$$\dot{x} \in -\operatorname{sign}^*(x) := \begin{cases} -1, & x > 0, \\ [-1, 1], & x = 0, \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$



Lineare Systeme mit mengenwertigen Nebenbedingungen

Es gilt:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bz \\ w &= Cx + Dz \\ w &\in \mathcal{F}(-z) \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{x} \in -\mathcal{M}(x)$$

mit

$$\mathcal{M}(x) := -Ax + B(\mathcal{F} + D)^{-1}(Cx).$$

Passivität und Maximal-Monotonie

(A, B, C, D) passiv & $\mathcal{F}$ maximal-monoton $\quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}$ ist maximal-monoton

Lineare Systeme mit mengenwertigen Nebenbedingungen

Es gilt:

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bz \\ w &= Cx + Dz \\ w &\in \mathcal{F}(-z) \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{x} \in -E^{-1}\mathcal{M}(x)$$

mit

$$\mathcal{M}(x) := -Ax + B(\mathcal{F} + D)^{-1}(Cx).$$

Maximal-Monotonie geht verloren

(E, A, B, C, D) passiv & $\mathcal{F}$ maximal-monoton $\not\Rightarrow$ $E^{-1}\mathcal{M}(x)$ ist maximal-monoton

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= z \\ \dot{x}_3 &= x_2 + z \\ 0 &= x_3 + z \\ w &= x_1 \\ -z &\in \mathcal{F}^{-1}(w) := \max\{0, w\} \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{x} \in -\begin{pmatrix} x_3 \\ \mathbb{R} \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \text{ für } x_3 = \max\{0, x_1\}, \ \emptyset \text{ sonst}$$

nicht monoton, betrachte z.B. $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Passivität: Definition und wichtige Konsequenz

Definition (Passivität)

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bz \\ w &= Cx + Dz \end{aligned} \quad \text{passiv} \quad :\Leftrightarrow \quad \exists V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ : \quad V(x(t_1)) \leq V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} z^\top w$$

Lemma (Passivität & spezielle quasi-Weierstrass-Form, Freund & Jarre 2004)

(E, A, B, C, D) *passiv (und minimal)* $\Rightarrow$ $\exists S, T$ *invertierbar:*

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \right)$$

Insbesondere ist eine (minimale) passive DAE entweder eine ODE oder eine DAE mit Index 2.

Theorem (Passivität & LMIs, Camlibel & Frasca 2009)

$$(E,A,B,C,D) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}, D \right)$$ *ist passiv mit* $V(x) = x^\top K x \Leftrightarrow$

1. $K = K^\top = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix} \geq 0$
2. $(A_1, B_1, C_1, D - C_2B_2 - C_3B_3)$ *ist passiv, d.h. es gilt folgende LMI:*

$$\begin{bmatrix} A_1^\top K_{11} + K_{11}A_1 & K_{11}B_1 - C_1^\top \\ B_1^\top K_{11} - C_1 & -(\widetilde{D} + \widetilde{D}^\top) \end{bmatrix} \leq 0, \quad \text{wobei } \widetilde{D} = D - C_2B_2 - C_3B_3$$

3. $B_3^\top K_{33} = -C_2$

Variablenelemination

Korollar

(x, z, w) löst passives und minimales (E, A, B, C, D) mit Nebenbedingung $w \in \mathcal{F}(-z)$ $\iff$

$$\overline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ -z \end{pmatrix} \quad \text{löst} \quad P\dot{\overline{x}} \in -\overline{\mathcal{M}}(\overline{x}),$$

wobei

$$P := \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & B_3^\top K_{33} B_3 \end{bmatrix} \text{ symmetrisch und positiv-semidefinit}$$

und

$$\overline{\mathcal{M}}(\overline{x}) := -\begin{bmatrix} K_{11}A_1 & -K_{11}B_1 \\ C_1 & -\widetilde{D} \end{bmatrix} \overline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{F}(-z) \end{pmatrix} \text{ maximal-monoton}$$

Neue Klasse von Differential-Inklusion

Differential-Algebraische-Inklusion

$$P\dot{x} \in -\mathcal{M}(x) \qquad \textbf{(DAI)}$$

Theorem (Camlibel, Iannelli, T., Tanwani 2016)

Betrachte (**DAI**) *mit $P \geq 0$ und max.-mon. $\mathcal{M}$. Dann gilt:*

1. *Für jedes Anfangswertproblem $x(0) = x_0$ mit $x_0 \in \mathcal{M}^{-1}(\operatorname{im} P)$ existiert eine globale Lösung $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ mit absolut-stetigem Px*
2. *Es gilt Stabilität im folgenden Sinne:*

$$\left\|Px^1(t) - Px^2(t)\right\| \leq c\|x^1(0) - x^2(0)\|,$$

insbesondere ist Px eindeutig durch den Anfangswert bestimmt.

Zusammenfassung

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bz \\ w &= Cx + Dz \\ w &\in \mathcal{F}(-z) \end{aligned}} \quad\longrightarrow\quad \boxed{\dot{x} \in -\mathcal{M}(x)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bz \\ w &= Cx + Dz \\ w &\in \mathcal{F}(-z) \end{aligned}} \quad\longrightarrow\quad \boxed{P\dot{\overline{x}} \in -\overline{\mathcal{M}}(\overline{x})}$$

- Passivität erhält Maximal-Monotonie
- Für DAEs ergibt sich maximal-monotene Differential-Algebraische-Inklusion
- Eindeutigkeit der Lösung geht verloren, aber globale Existenz ist gesichert
- Weitere Fragen:
  - Hinzunahme von externen Eingängen (im ODE-Fall möglich)
  - Wie wichtig ist positive Semidefinitheit und Symmetrie von P?
  - Was lässt sich über die Uneindeutigkeit sagen, physikalische Interpretation?