

Funnel-Synchronisation für Multiagentensysteme

Stephan Trenn

gemeinsame Arbeit mit Hyungbo Shim (Seoul National University)

AG Technomathematik, Technische Universität Kaiserslautern

Treffen des GAMM Fachausschuss „Dynamik und Regelung“
Universität Duisburg, Freitag, 02.10.2015, 08:40





- 1 Synchronisation heterogener Agenten
- 2 High-gain und Funnel-Control
- 3 Simulationen
- 4 Schwach zentralisierte Funnel-Synchronisation

Problemstellung

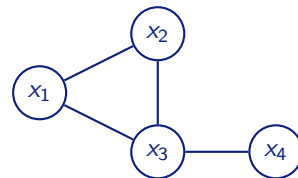


Gegeben

- N Agenten mit **individuellen** skalaren Dynamiken:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i) + u_i$$

- ungerichteter zusammenhängender Kopplungsgraph $G = (V, E)$
- Agenten kennen **Durchschnitt der Nachbarzustände**



$$\bar{x}_1 := \frac{1}{2}(x_2 + x_3)$$

$$\bar{x}_2 := \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$$

$$\bar{x}_3 := \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_4)$$

$$\bar{x}_4 := x_3$$

Gesucht

Reglerentwurf zur praktischen Synchronisation

$$x_1 \approx x_2 \approx \dots \approx x_n$$



Ein „high-gain“ Resultat

Sei $\mathcal{N}_i := \{ j \in V \mid (j, i) \in E \}$ und $d_i := |\mathcal{N}_i|$.

Diffusive Kopplung

$$u_i = -k \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_i - x_j) = -kd_i(x_i - \bar{x}_i)$$

Theorem (Praktische Synchronisation, Kim et al. 2013)

Annahmen: G zusammenhängend, $(t, a) \mapsto f_i(t, a)$ ist beschränkt in t und global Lipschitz in a , alle Lösungen der **Durchschnittsdynamik**

$$\dot{s}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(t, s(t))$$

bleiben **beschränkt**. Dann gilt $\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \forall k \geq K$: Diffusive Kopplung ergibt

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - x_j(t)| < \varepsilon \quad \forall i, j \in V$$



Anmerkungen zum high-gain Resultat

Gemeinsame Trajektorie

Es gilt sogar

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - s(t)| < \varepsilon/2,$$

wobei $s(\cdot)$ die Lösung von

$$\dot{s}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(t, s(t)), \quad s(0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Unabhängig von Kopplungsstruktur und Verstärkung k .

Fehlerrückführung

Mit $e_i := x_i - \bar{x}_i$ hat diffuse Kopplung die Form

$$u_i = -k_i e_i$$

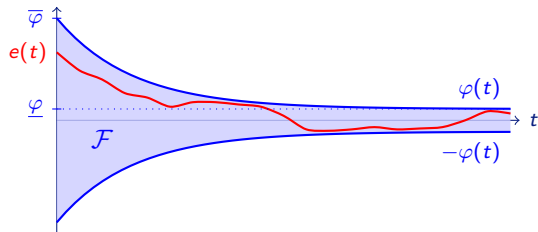
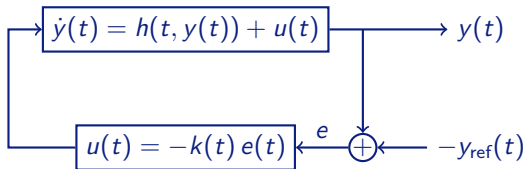
Achtung: $e_i \neq x_i - s$, insbesondere kennen Agenten „Grenztrajektorie“ $t \mapsto s(t)$ nicht

Inhalt



- 1 Synchronisation heterogener Agenten
- 2 High-gain und Funnel-Control**
- 3 Simulationen
- 4 Schwach zentralisierte Funnel-Synchronisation

Erinnerung Funnel Controller



Theorem (Praktische Folgeregelung, Ilchmann et al. 2002)

Funnel-Control

$$k(t) = \frac{1}{\varphi(t) - |e(t)|}$$

funktioniert.



Funnel-Synchronisation

Erinnerung diffusive Kopplung: $u_i = -k_i e_i$ mit $e_i = x_i - \bar{x}_i$.

Kombiniere diffusive Kopplung mit Funnel Controller

$$u_i(t) = -k_i(t) e_i(t) \quad \text{mit} \quad k_i(t) = \frac{1}{\varphi(t) - |e_i(t)|}$$

Inhalt



- 1 Synchronisation heterogener Agenten
- 2 High-gain und Funnel-Control
- 3 Simulationen**
- 4 Schwach zentralisierte Funnel-Synchronisation

Beispiel



Simulationen im folgenden für $N = 5$ Agenten mit Dynamik

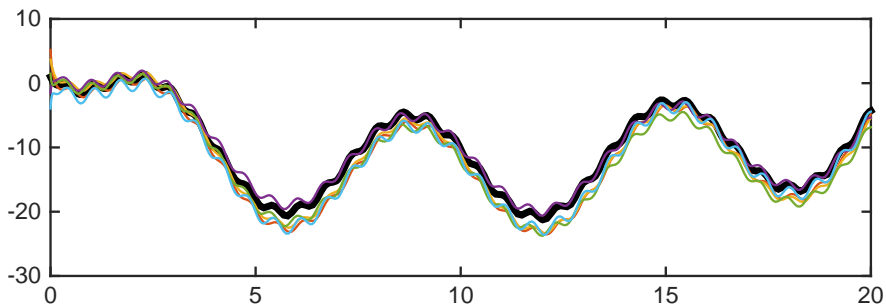
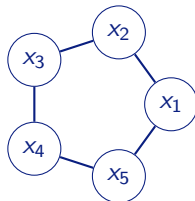
$$f_i(t, x_i) = (-1 + \delta_i)x_i + 10 \sin t + 10m_i^1 \sin(0.1t + \theta_i^1) + 10m_i^2 \sin(10t + \theta_i^2),$$

mit zufällig gewählten Parametern $\delta_i, m_i^1, m_i^2 \in \mathbb{R}$ und $\theta_i^1, \theta_i^2 \in [0, 2\pi]$.

Parameter identisch in allen folgenden Simulationen, insbesondere ist $\delta_2 > 1$ also hat Agent 2 **instabile Dynamik** (ohne Kopplung).

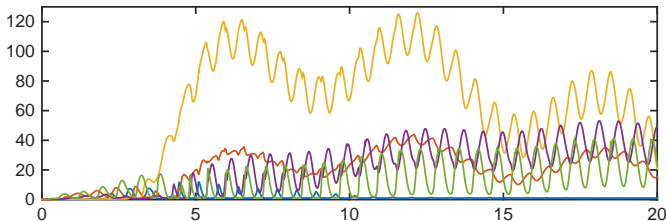
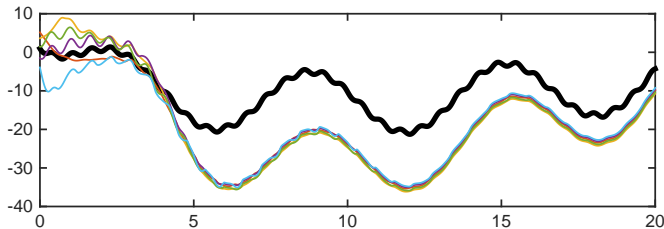
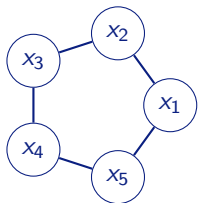
Simulation mit konstanten k 

$$u_i = -k e_i \text{ mit } k = 10$$





Funnel-Synchronisation



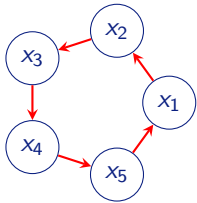
$$u_i(t) = -k_i(t)e_i(t)$$

$$k_i(t) = \frac{1}{\varphi(t) - |e_i(t)|}$$

$$\varphi(t) = \underline{\varphi} + (\bar{\varphi} - \underline{\varphi})e^{-\lambda t}$$

$$\bar{\varphi} = 20, \underline{\varphi} = 1, \lambda = 1$$

Funnel-Synchronisation, gerichteter Graph

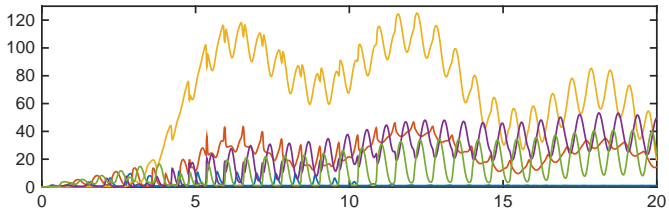
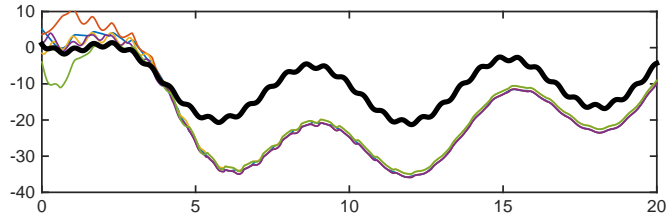


$$u_i(t) = -k_i(t)e_i(t)$$

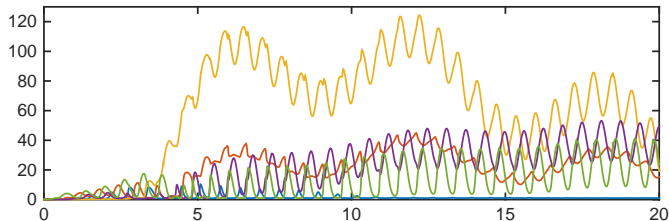
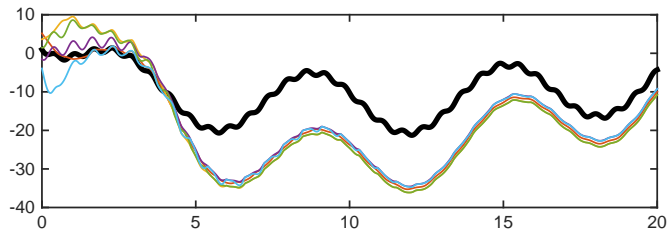
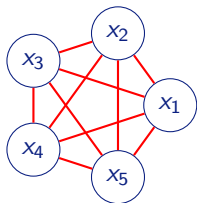
$$k_i(t) = \frac{1}{\varphi(t) - |e_i(t)|}$$

$$\varphi(t) = \underline{\varphi} + (\bar{\varphi} - \underline{\varphi})e^{-\lambda t}$$

$$\bar{\varphi} = 20, \underline{\varphi} = 1, \lambda = 1$$



Funnel-Synchronisation, vollständiger Graph



$$u_i(t) = -k_i(t)e_i(t)$$

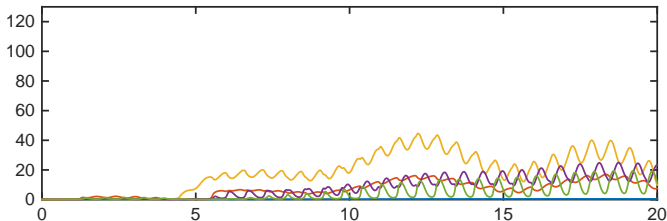
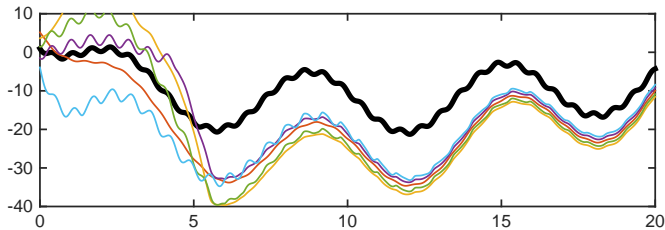
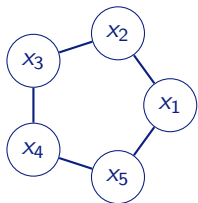
$$k_i(t) = \frac{1}{\varphi(t) - |e_i(t)|}$$

$$\varphi(t) = \underline{\varphi} + (\bar{\varphi} - \underline{\varphi})e^{-\lambda t}$$

$$\bar{\varphi} = 20, \underline{\varphi} = 1, \lambda = 1$$



Funnel-Synchronisation mit größerem Funnel



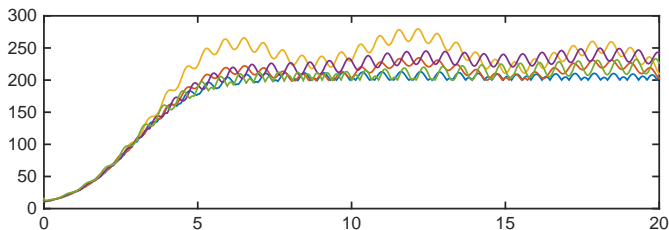
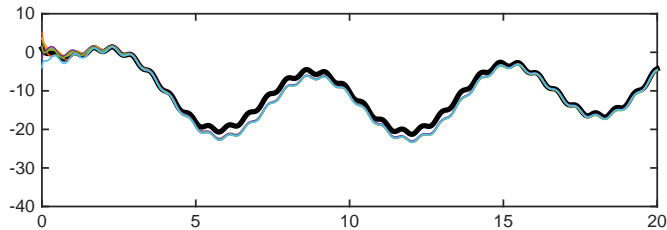
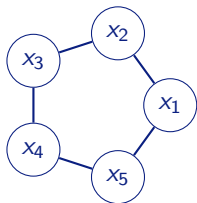
$$u_i(t) = -k_i(t)e_i(t)$$

$$k_i(t) = \frac{1}{\varphi(t) - |e_i(t)|}$$

$$\varphi(t) = \underline{\varphi} + (\bar{\varphi} - \underline{\varphi})e^{-\lambda t}$$

$$\bar{\varphi} = 30, \underline{\varphi} = 2, \lambda = 0.3$$

Funnel-Synchronisation mit zusätzlicher Verstärkung



$$u_i(t) = -k_i(t)e_i(t)$$

$$k_i(t) = \frac{200}{\varphi(t) - |e_i(t)|}$$

$$\varphi(t) = \underline{\varphi} + (\bar{\varphi} - \underline{\varphi})e^{-\lambda t}$$

$$\bar{\varphi} = 20, \underline{\varphi} = 1, \lambda = 1$$

Inhalt



- 1 Synchronisation heterogener Agenten
- 2 High-gain und Funnel-Control
- 3 Simulationen
- 4 Schwach zentralisierte Funnel-Synchronisation**

Dezentralisierte und schwach zentralisierte Funnel-Synchronisation



Für vollständig dezentraler Funnel-Synchronisation

$$u_i(t) = -k_i(t)e_i(t) \quad \text{mit} \quad k_i(t) = \frac{1}{\varphi(t) - |e_i(t)|}$$

noch **keine theoretischen Ergebnisse**.

Schwach zentralisierte Funnel-Synchronisation

Analog zur diffusiven Kopplung benutzen alle Agenten die **gleiche** Verstärkung:

$$u_i(t) = -k_{\max}(t) d_i e_i(t) \quad \text{mit} \quad k_{\max}(t) := \max_{i \in V} \frac{1}{\varphi(t) - |e_i(t)|}$$



Erstes theoretisches Resultat

Theorem

Annahmen:

- Keine „endliche Entweichzeit“ der x_i
- Der Graph ist zusammenhängend, ungerichtet und d -regulär mit

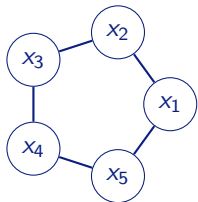
$$d > \frac{N}{2} - 1$$

- Funnelgrenze $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [\underline{\varphi}, \bar{\varphi}]$ ist differenzierbar, nichtwachsend und

$$|e_i(0)| < \varphi(0), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

Dann funktioniert schwach zentralisierte Funnel-Synchronisation.

Simulation schwach zentralisierte Funnel-Synchronisation



$$u_i(t) = -k_{\max}(t)e_i(t)$$

$$k_{\max}(t) = \max_{i \in V} \frac{1}{\varphi(t) - |e_i(t)|}$$

$$\varphi(t) = \underline{\varphi} + (\bar{\varphi} - \underline{\varphi})e^{-\lambda t}$$

$$\bar{\varphi} = 20, \underline{\varphi} = 1, \lambda = 1$$

