Averaging für geschaltete differential-algebraische Gleichungen

Stephan Trenn
C. Pedicini, F. Vasca, L. Iannelli (Università del Sannio, Benevento)

AG Technomathematik, TU Kaiserslautern

Treffen des GAMM-Fachausschuss "Dynamik und Regelungstheorie"
Kaiserslautern, 28.02.2013, 14:20

TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Inhalt

Averaging: Grundidee

geschaltetes System	$\approx$ schnelles Schalten	ungeschaltetes Durchschnittssystem

Anwendungen

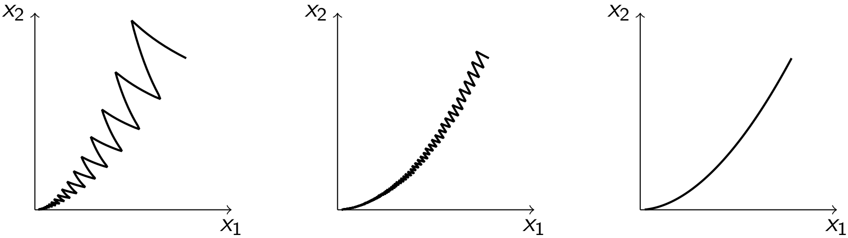
- Schnelles Schalten tritt auf bei
  - Pulsweitenmodulation
  - „Sliding mode“-Regelung
  - Generell: schnelle digitale Regler
- Vereinfachte Analyse
  - Stabilität für genügend schnelles Schalten
  - Generell: Gewünschtes Verhalten (approximativ) durch entsprechendes Schalten

Einfaches Beispiel

Beispiel

$$\dot{x} = A_\sigma x, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \sigma : \mathbb{R} \to \{1, 2\} \text{ periodisch}$$

Schaltfrequenz $\longrightarrow$ ∞



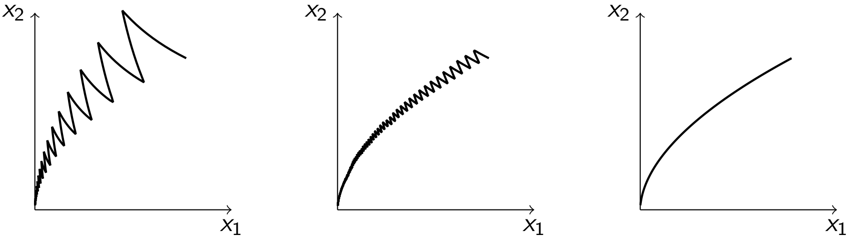
Zeitanteil der Systeme unabhängig von Schaltfrequenz (hier 45 : 5555 : 45)

Einfaches Beispiel

Beispiel

$$\dot{x} = A_\sigma x, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \sigma : \mathbb{R} \to \{1, 2\} \text{ periodisch}$$

Schaltfrequenz $\longrightarrow$ ∞



Zeitanteil der Systeme unabhängig von Schaltfrequenz (hier $45 : 5555 : 45$)

Averaging-Ergebnis für geschaltete lineare ODEs

Betrachte geschaltete lineare ODE

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad x(0) = x_0$$

mit periodischem $\sigma : \mathbb{R} \to \{1, 2, \ldots, M\}$ und Periodenlänge $p > 0$ und $d_1, d_2, \ldots, d_M \geq 0$ mit $d_1 + d_2 + \ldots + d_M = 1$ bezeichne den zeitlichen Anteil des jeweiligen Teilsystems pro Periode.

Theorem (Brockett & Wood 1974)

Sei das Durchschnittssystem gegeben durch

$$\dot{x}_{av} = A_{av}x_{av}, \quad x_{av}(0) = x_0$$

und

$$A_{av} := d_1A_1 + d_2A_2 + \ldots + d_MA_M.$$

Dann gilt auf jedem kompaktem Zeitinterval

$$\|x(t) - x_{av}(t)\| = O(p).$$

Geschaltete DAEs

Modellierung elektrischer Schaltungen führt zu

Geschalteten differential-algebraischen Gleichungen (DAEs)

$$E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \qquad \textbf{(swDAE)}$$

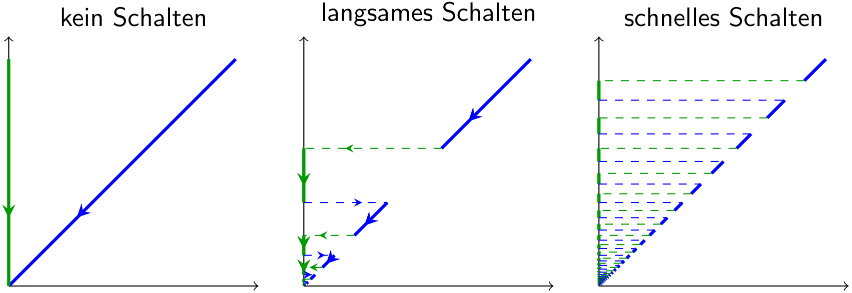
Frage

Ist ein ähnliches Averaging-Resultat auch für geschaltete DAEs richtig?

Ein Gegenbeispiel

Betrachte $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$ mit

$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right), \quad (E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

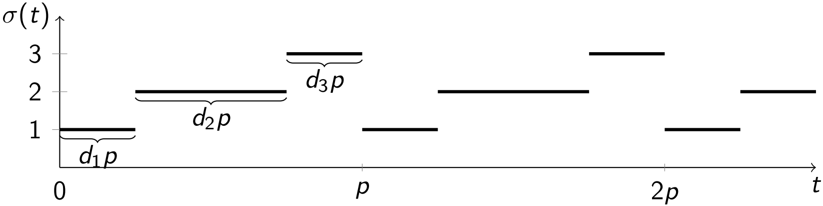


Systemklasse

$$E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \qquad \textbf{(swDAE)}$$

Annahmen

- $\sigma : [0,\infty) \to \{1,2,\dots,M\}$ periodisch mit Periode $p>0$
- O.b.d.A.: σ auf $[0,p)$ monoton wachsend und $d_k \geq 0$ ist zeitlicher Anteil von System $k \in \{1,2,\dots,M\}$
- Matrizenpaare (E_k, A_k), $k \in \{1,2,\dots,M\}$, regulär, d.h. $\det(sE_k - A_k) \not\equiv 0$



Ungeschaltete DAEs: Eigenschaften

Theorem (Quasi-Weierstraß-Form, Weierstrass 1868)

(E, A) *regulär* $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\exists T, S$ *invertierbar:*

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right), \quad N \text{ nilpotent}$$

Definition (Konsistenzrojektor)

$$\Pi_{(E,A)} := T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$$

Weitere Details hierzu im nächsten Vortrag von Herrn Küsters.

Definition (Differentialprojektor und A^{diff})

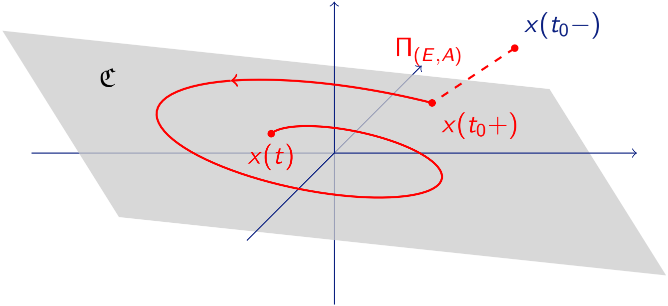
$$\Pi^{\text{diff}}_{(E,A)} := T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S, \quad A^{\text{diff}} := \Pi^{\text{diff}}_{(E,A)} A$$

Lösungscharakterisierung von DAEs

Theorem (Lösungscharakterisierung, Tanwani & T. 2010)

Betrachte DAE $E\dot{x} = Ax$ *mit regulärem Matrixpaar* (E, A) *und zugehörigem Konistenzprojektor* $\Pi_{(E,A)}$ *sowie* A^{diff}
$\Rightarrow$

$$x(t) = e^{A^{\text{diff}}(t-t_0)}\Pi_{(E,A)}x(t_0-) \in \mathfrak{C} \quad t \in (t_0, \infty).$$



Bemerkung: Bei t_0 treten im Allgemeinen noch Dirac-Impulse auf!

Lösungsverhalten für geschaltete DAEs

$$E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \qquad \textbf{(swDAE)}$$

mit Konsistenzprojektoren Π_k und A_k^{diff}

Theorem (Impulsefreiheit, T. 2009**)**

Alle Lösungen von (**swDAE**) *sind impulsefrei, wenn*

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, M\} : \quad E_k(I - \Pi_k)\Pi_{k-1} = 0, \qquad \textbf{(IFB)}$$

wobei $\Pi_{-1} := \Pi_M$.

Folgerung

Alle Lösungen von (**swDAE**) *mit* (**IFB**) *sind gegeben durch*

$$x(t) = e^{A_k^{\text{diff}}(t-t_k)}\Pi_k e^{A_{k-1}^{\text{diff}}(t_k-t_{k-1})}\Pi_{k-1}\cdots e^{A_2^{\text{diff}}(t_3-t_2)}\Pi_2 e^{A_1^{\text{diff}}(t_2-t_1)}\Pi_1 x(t_1-)$$

Inhalt

Bedingung an die Konsistenzprojektoren

Im folgenden sei $M = 2$.

Annahme: Kommutierende Projektoren

$$\Pi_1 \Pi_2 = \Pi_2 \Pi_1 \qquad \textbf{(KP)}$$

Lemma

$\textbf{(KP)} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{im} \Pi_1 \Pi_2 = \operatorname{im} \Pi_1 \cap \operatorname{im} \Pi_2$

Bemerkung: $\operatorname{im} \Pi_1 \cap \operatorname{im} \Pi_2 = \mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2$ und offensichtlich muss das Durchschnittssystem, falls es existiert, ausschließlich Lösungen im Schnitt der Konsistenzräume haben, also wird der Projektor

$$\Pi_\cap := \Pi_1 \Pi_2 = \Pi_2 \Pi_1$$

eine entscheidende Rolle spielen!

Im Beispiel galt: $\Pi_1 \Pi_2 = \Pi_1 \neq \Pi_2 = \Pi_2 \Pi_1$

Hauptergebnis für $M = 2$

$$E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \qquad \textbf{(swDAE)}$$

$$\Pi_1\Pi_2 = \Pi_2\Pi_1 \qquad \textbf{(KP)}$$

Theorem (Averaging für geschaltete DAEs)

Betrachte impulsefreie (**swDAE**) *mit* $M = 2$ *und Konsistenzprojektoren* Π_1, Π_2 *sowie* $A_1^{\text{diff}}, A_2^{\text{diff}}$ *und es gelte* (**KP**). *Das Durchschnittssystem ist*

$$\dot{x}_{\text{av}} = \Pi_\cap A_{\text{av}}^{\text{diff}} \Pi_\cap x_{\text{av}}, \quad x_{\text{av}}(0) = \Pi_\cap x(0-)$$

mit $\Pi_\cap = \Pi_1\Pi_2$ *und*

$$A_{\text{av}}^{\text{diff}} := d_1 A_1^{\text{diff}} + d_2 A_2^{\text{diff}}.$$

Es gilt dann $\forall t \in (0, T]$

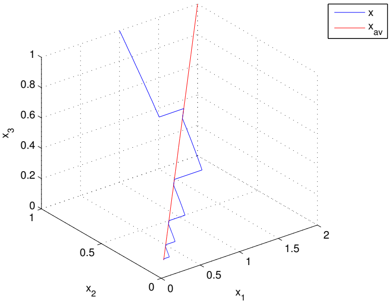
$$\|x(t) - x_{\text{av}}(t)\| = O(p)$$

Beispiel

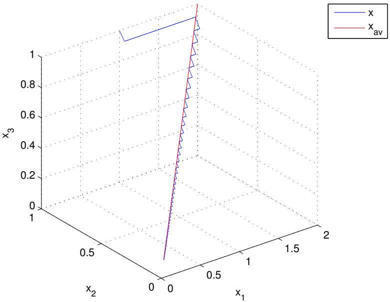
$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right), (E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; \Pi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_\cap = \Pi_2$$

$d_1 = 0.4, \quad p = 0.2$



$d_1 = 0.4, \quad p = 0.02$



Zusammenfassung und Ausblick

- Verallgemeinerung des klassischen Averaging-Resultats auf geschaltete DAEs
  - Nicht in allen Fällen existiert Durchschnittssystem
  - Zusätzliche Bedingungen an Konsistenzprojektoren nötig
- Offene Fragen
  - Kommutativität der Konsistenzprojektoren notwendig?
  - Verallgemeinerung auf mehr als zwei Systeme (in Arbeit)
  - Impulse: Konvergenz im distributionellen Sinne?