Der Bang-Bang-Funnel-Regler für beliebigen Relativgrad

Stephan Trenn (gemeinsam mit Daniel Liberzon, UIUC)

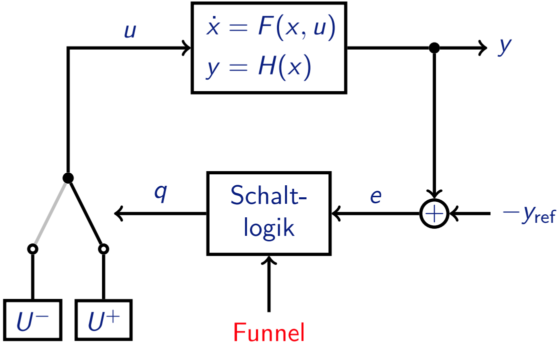
AG Technomathematik, TU Kaiserslautern

Elgersburg Workshop 2013, 14. Februar 2013, 8:45

Technische Universität
Kaiserslautern

Inhalt

Trajektorienfolgeregelung: Geschlossener Kreis



Referenzsignal $y_{\text{ref}} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ genügend glatt

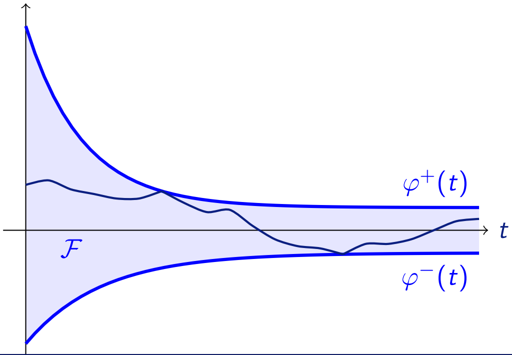
Der Funnel

Regelungsziel

Fehler $e := y - y_{\text{ref}}$ verbleibt im *Funnel*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varphi^-, \varphi^+) := \{ \ (t, e) \ \big| \ \varphi^-(t) \le e \le \varphi^+(t) \ \}$$

wobei $\varphi_\pm : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ genügend glatt



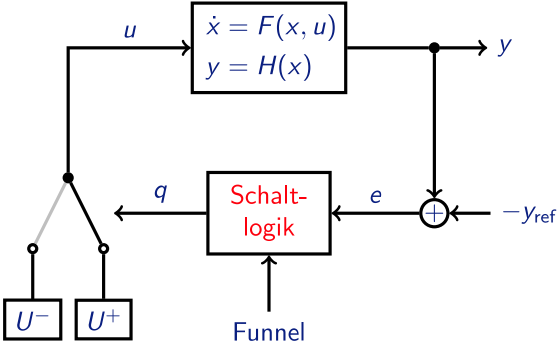
- zeitvariante Fehlerschranke
- transientes Verhalten
- praktische Konvergenz ($|e(t)| < \lambda$ für $t >> 0$)

Der Bang-Bang-Funnel-Regler

Kontinuierlicher Funnel-Regler: Eingeführt von Ilchmann et al. 2002

Neuer Ansatz

Erreiche Regelziele mit Bang-Bang-Regelung, i.e. $u(t) \in \{U^-, U^+\}$



Relativgrad Eins

Definition (Relativgrad Eins)

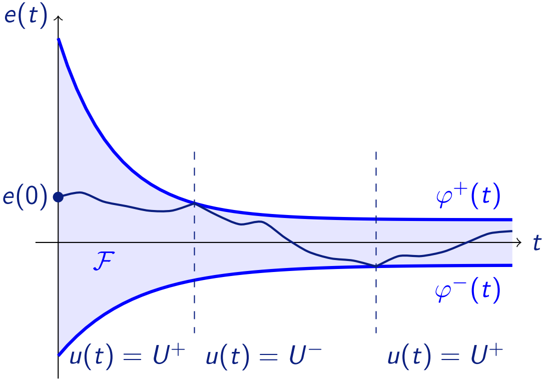
$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x,u) \\ y &= H(x) \end{aligned} \qquad \cong \qquad \begin{aligned} \dot{y} &= f(y,z) + \overbrace{g(y,z)}^{>0}\, u \\ \dot{z} &= h(y,z) \end{aligned}$$

- Strukturelle Annahme
- f, g, h müssen Regler nicht bekannt sein
- Zulässigkeitsannahmen (später) formuliert mit Hilfe von f, g, h

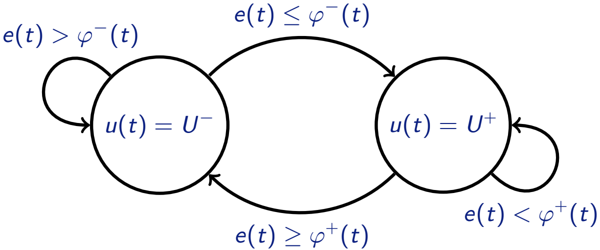
Wichtige Eigenschaft

$$\begin{aligned} u(t) << 0 \quad &\Rightarrow \quad \dot{y}(t) << 0 \\ u(t) >> 0 \quad &\Rightarrow \quad \dot{y}(t) >> 0 \end{aligned}$$

Schaltlogik



Schaltlogik



Zu einfach?

$\Rightarrow$ Zulässigkeitsannahmen

Zulässigkeitsannahmen

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y,z) + g(y,z)u, && y_0 \in \mathbb{R} \\ \dot{z} &= h(y,z), && z_0 \in Z_0 \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

$$Z_t := \left\{ z(t) \;\middle|\; \begin{array}{l} z : [0,t] \to \mathbb{R}^{n-1} \text{ löst } \dot{z} = h(y,z) \text{ für ein} \\ z^0 \in Z_0 \text{ und für ein } y : [0,t] \to \mathbb{R} \\ \text{mit } \varphi^-(\tau) \leq y(\tau) - y_{\text{ref}}(\tau) \leq \varphi^+(\tau) \\ \forall \tau \in [0,t] \end{array} \right\}.$$

Zulässigkeitsannahmen

$$\forall t \geq 0 \ \forall z_t \in Z_t : \quad \begin{aligned} U^- &\leq \frac{\dot{\varphi}^+(t) + \dot{y}_{\text{ref}}(t) - f(y_{\text{ref}}(t) + \varphi^+(t), z_t)}{g(y_{\text{ref}}(t) + \varphi^+(t), z_t)} \\ U^+ &\geq \frac{\dot{\varphi}^-(t) + \dot{y}_{\text{ref}}(t) - f(y_{\text{ref}}(t) + \varphi^-(t), z_t)}{g(y_{\text{ref}}(t) + \varphi^-(t), z_t)} \end{aligned}$$

Hauptresultat für Relativgrad Eins

Theorem (Bang-Bang-Funnel-Regler, Liberzon & T. 2010)

Relativgrad Eins & Funnel & einfache Schaltlogik & Zulässigkeit

$\Rightarrow$

Bang-bang-Funnel-Regler funktioniert:

- *Existenz und Eindeutigkeit einer globalen Lösung*
- *Fehler verbleibt im Funnel*
- *kein Zenon-Verhalten*

Notwendiges Systemwissen

- für Reglerimplementierung:
  - Relativgrad Eins
  - Signale: Fehler $e(t)$ und Funnelgrenzen $\varphi^{\pm}(t)$
- um Zulässigkeit zu prüfen:
  - Schranken der Nulldynamik
  - Schranken von f and g
  - Schranken von y_{ref} und $\dot{y}_{\text{ref}}$
  - Schranken der Funnelgrenzen

Inhalt

Relativgrad Zwei

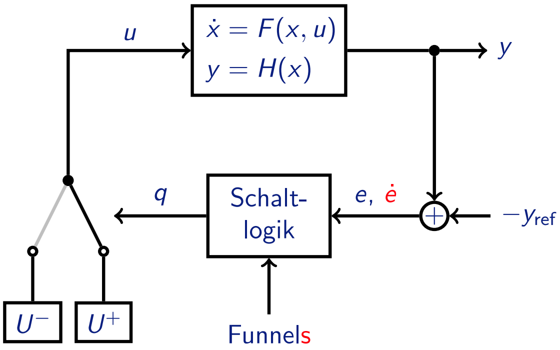
Definition (Relativgrad Zwei)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x,u) \\ y &= H(x) \end{aligned} \qquad \cong \qquad \begin{aligned} \ddot{y} &= f(y,\dot{y},z) + \overbrace{g(y,\dot{y},z)}^{>0}\, u \\ \dot{z} &= h(y,\dot{y},z) \end{aligned}$$

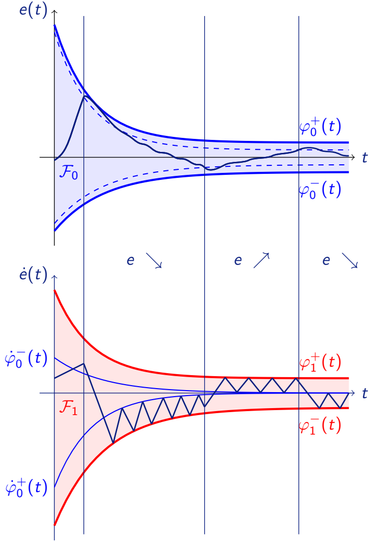
Wesentliche Eigenschaft

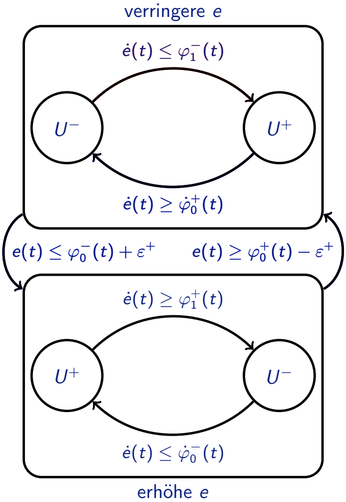
$$\begin{aligned} u(t) << 0 \quad &\Rightarrow \quad \ddot{y}(t) << 0 \\ u(t) >> 0 \quad &\Rightarrow \quad \ddot{y}(t) >> 0 \end{aligned}$$

Trajektorienfolgeregelung: Geschlossener Kreis



Die Schaltlogik





Relative degree r

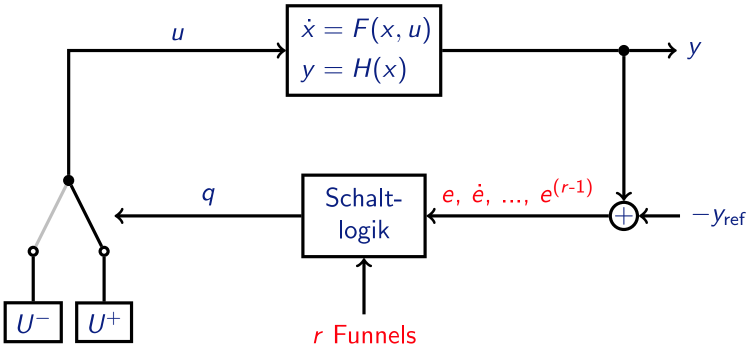
Definition (Relative degree r)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x,u)\\ y &= H(x)\end{aligned} \quad \cong \quad \begin{aligned} y^{(r)} &= f(y,\dot{y},\ldots,y^{(r-1)},z) + \overbrace{g(y,\ldots,y^{(r-1)},z)}^{>0}\,u \\ \dot{z} &= h(y,\dot{y},\ldots,y^{(r-1)},z)\end{aligned}$$

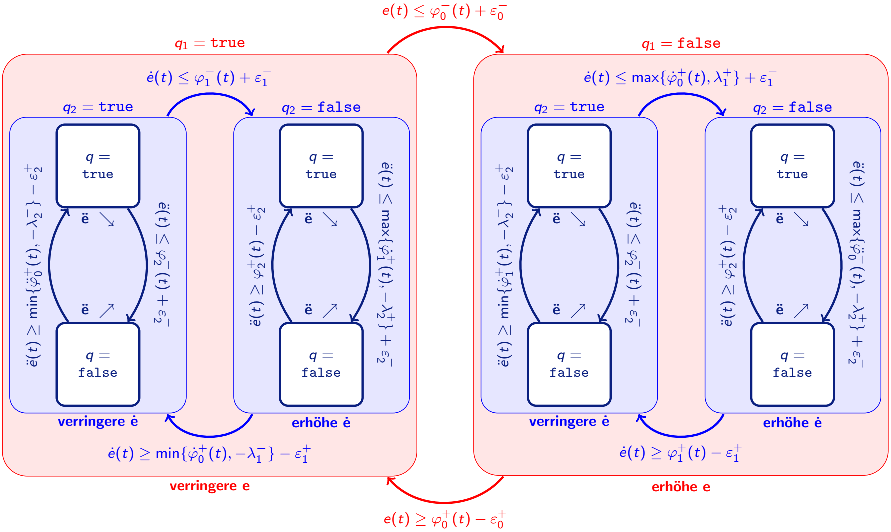
Wesentliche Eigenschaft

$$u(t) << 0 \quad \Rightarrow \quad y^{(r)}(t) << 0$$
$$u(t) >> 0 \quad \Rightarrow \quad y^{(r)}(t) >> 0$$

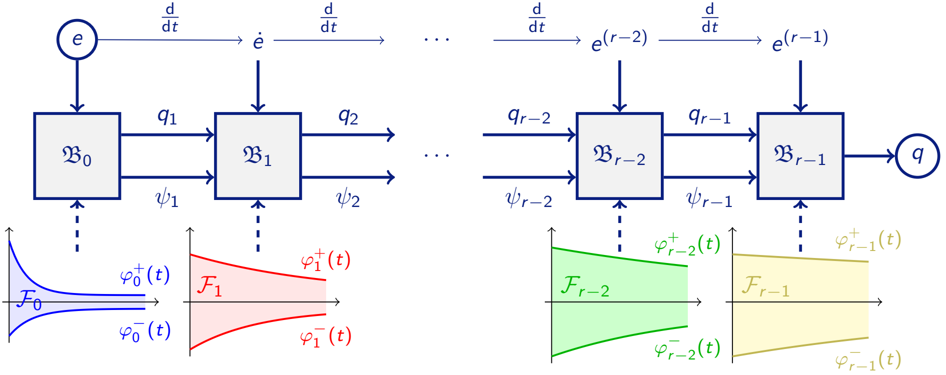
Trajektorienfolgeregelung: Geschlossener Kreis



Rekursiver Ansatz, Beispiel $r = 3$



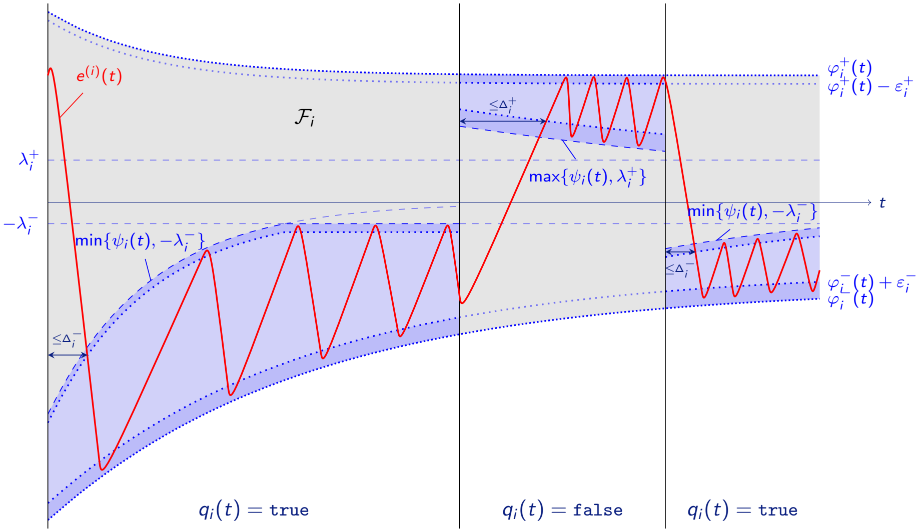
Hierarchische Schaltlogik



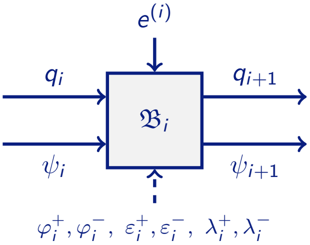
$$q_i = \texttt{true} \quad \Rightarrow \quad \text{Ziel: } e^{(i)}(t) < \min\{\psi_i(t), -\lambda_i^-\}$$

$$q_i = \texttt{false} \quad \Rightarrow \quad \text{Ziel: } e^{(i)}(t) > \max\{\psi_i(t), \lambda_i^+\}$$

Gewünschtes Verhalten des Blocks $\mathfrak{B}_i$



Definition der Schaltlogik

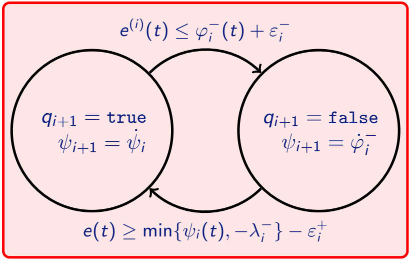


$q_i = \texttt{true} \quad \Rightarrow \quad$ Ziel: $e^{(i)} < \min\{\psi_i, -\lambda_i^-\}$

$q_i = \texttt{false} \quad \Rightarrow \quad$ Ziel: $e^{(i)} > \max\{\psi_i, \lambda_i^+\}$

wobei $\psi_i \in \left\{\dot{\varphi}_{i-1}^{\pm}, \ddot{\varphi}_{i-2}^{\pm}, \ldots, (\varphi_0^{\pm})^{(i)}\right\}$

$q_1 = \texttt{true}$



$q_1 = \texttt{false}$

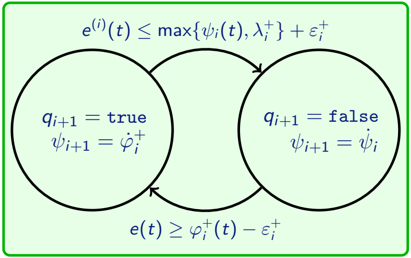
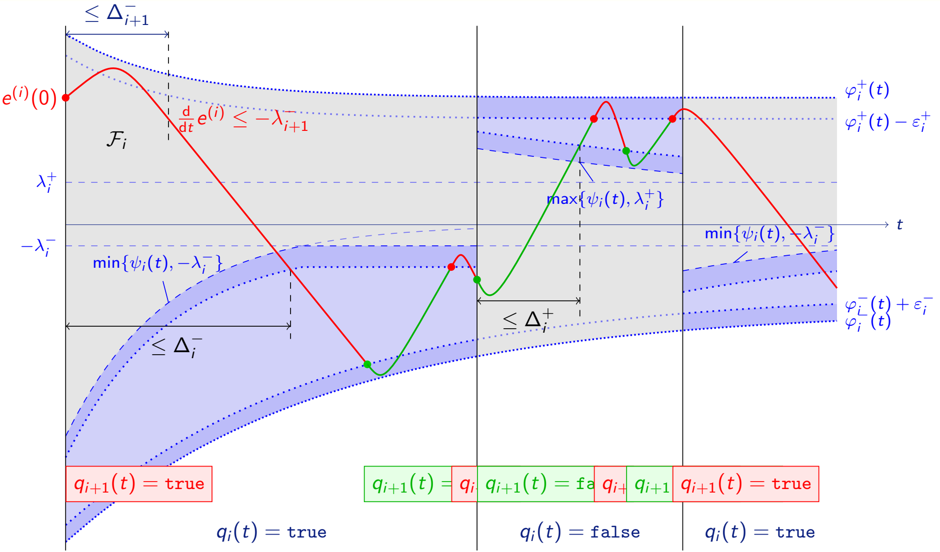


Illustration der Schaltlogik von Block $\mathfrak{B}_i$



Zulässigkeitsannahmen **(Z1)-(Z8)**

„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r-1)$-sten)
- Funnelgrenzen $\varphi_i^\pm$ und deren Ableitungen
- Sicherheitsabstände $\varepsilon_i^\pm$ und minimale Wachstumsraten $\lambda_i^\pm$
- Zur Analyse: Einschwingzeiten $\Delta_i^\pm$

Zulässigkeitsannahme (Z1): Relativgrad r

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x,u) \\ y &= H(x) \end{aligned} \quad \cong \quad \begin{aligned} y^{(r)} &= f(y,\dot{y},\ldots,y^{(r-1)},z) + \overbrace{g(y,\ldots,y^{(r-1)},z)}^{>0}\, u \\ \dot{z} &= h(y,\dot{y},\ldots,y^{(r-1)},z), \quad z_0 \in Z_0 \subseteq \mathbb{R}^{n-r} \end{aligned}$$

und keine endliche Entweichzeit der Nulldynamik

Zulässigkeitsannahmen **(Z1)-(Z8)**

„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r-1)$-sten)
- Funnelgrenzen $\varphi_i^{\pm}$ und deren Ableitungen
- Sicherheitsabstände $\varepsilon_i^{\pm}$ und minimale Wachstumsraten $\lambda_i^{\pm}$
- Zur Analyse: Einschwingzeiten $\Delta_i^{\pm}$

Zulässigkeitsannahme (Z2): Referenzsignal

y_{ref} ist r mal (schwach) differenzierbar

Wegen der Relativgradannahme ist y per Definition r mal (schwach) differenzierbar, also folgt, dass e ebenfalls r mal (schwach) differenzierbar ist.

Zulässigkeitsannahmen **(Z1)-(Z8)**

„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r-1)$-sten)
- Funnelgrenzen $\varphi_i^{\pm}$ und deren Ableitungen
- Sicherheitsabstände $\varepsilon_i^{\pm}$ und minimale Wachstumsraten $\lambda_i^{\pm}$
- Zur Analyse: Einschwingzeiten $\Delta_i^{\pm}$

Zulässigkeitsannahme (Z3): Anfangsfehler

$$e^{(i)}(0) \in [\varphi_i^-(0) + \varepsilon_i^+, \varphi_i^-(0) - \varepsilon_i^+]$$

Zulässigkeitsannahmen **(Z1)-(Z8)**

„Zutaten" für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r-1)$-sten)
- Funnelgrenzen $\varphi_i^{\pm}$ und deren Ableitungen
- Sicherheitsabstände $\varepsilon_i^{\pm}$ und minimale Wachstumsraten $\lambda_i^{\pm}$
- Zur Analyse: Einschwingzeiten $\Delta_i^{\pm}$

Zulässigkeitsannahme (Z4): Funnelgrenzen

- $\varphi_i^{\pm}$ sind $r-i$ mal (schwach) differenzierbar
- $\varphi_i^{\pm}$ und deren Ableitungen sind beschränkt

Zulässigkeitsannahmen **(Z1)-(Z8)**

„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r-1)$-sten)
- Funnelgrenzen $\varphi_i^{\pm}$ und deren Ableitungen
- Sicherheitsabstände $\varepsilon_i^{\pm}$ und minimale Wachstumsraten $\lambda_i^{\pm}$
- Zur Analyse: Einschwingzeiten $\Delta_i^{\pm}$

Zulässigkeitsannahme (Z5): Funnels passend

- $\varphi_0^+(t) - \varepsilon_0^+ > \varphi_0^-(t) + \varepsilon_0^-$
- Für $\psi^{\pm} \in \{\dot{\varphi}_{i-1}^{\pm}, \ddot{\varphi}_{i-2}^{\pm}, \ldots, (\varphi_0^{\pm})^{(i)}\}$ und $i = 1, 2, \ldots, r-1$:
  - $\varphi_i^+(t) - \varepsilon_i^+ > \max\{\psi^-(t), \lambda_i^+\} + \varepsilon_i^-$
  - $\min\{\psi^+(t), \lambda_i^-\} - \varepsilon_i^+ > \varphi_i^-(t) + \varepsilon_i^-$

Zulässigkeitsannahmen **(Z1)-(Z8)**

„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r-1)$-sten)
- Funnelgrenzen $\varphi_i^\pm$ und deren Ableitungen
- Sicherheitsabstände $\varepsilon_i^\pm$ und minimale Wachstumsraten $\lambda_i^\pm$
- Zur Analyse: Einschwingzeiten $\Delta_i^\pm$

Zulässigkeitsannahme (Z6): Einschwingzeiten

Für $i = 0, 1, \ldots, r-1$ und $\Delta_r^\pm \geq 0$ existieren $\Delta_i^\pm$ mit

$$\Delta_i^\pm \geq \Delta_{i+1}^\pm + \frac{\|\varphi_i^+\|_\infty + \|\varphi_i^-\|_\infty}{\lambda_{i+1}^\pm}$$

echte Einschränkung folgt erst mit folgender Annahme ...

Zulässigkeitsannahmen (Z1)-(Z8)

„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r-1)$-sten)
- Funnelgrenzen $\varphi_i^\pm$ und deren Ableitungen
- Sicherheitsabstände $\varepsilon_i^\pm$ und minimale Wachstumsraten $\lambda_i^\pm$
- Zur Analyse: Einschwingzeiten $\Delta_i^\pm$

Zulässigkeitsannahme (Z7): Sicherheitsabstand

Für $i = 0, 1, \ldots, r-2$ und $\psi^\pm \in \{\varphi_i^\pm, \dot{\varphi}_{i-1}^\pm, \ldots, (\varphi_0^\pm)^{(i)}\}$

$$\varepsilon_i^\pm > \Delta_{i+2}^\pm \|\dot{\psi}^\pm - \varphi_{i+1}^\pm\|_\infty + \frac{(\|\dot{\psi}^\pm\|_\infty + \varphi_{i+1}^\pm\|_\infty)^2}{2\lambda_{i+2}^\mp}$$

Bemerkung: $\lambda_r^\pm$ ist zusätzlicher Parameter zur Analyse und erfüllt ...

Zulässigkeitsannahmen **(Z1)-(Z8)**

„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r-1)$-sten)
- Funnelgrenzen $\varphi_i^\pm$ und deren Ableitungen
- Sicherheitsabstände $\varepsilon_i^\pm$ und minimale Wachstumsraten $\lambda_i^\pm$
- Zur Analyse: Einschwingzeiten $\Delta_i^\pm$

Zulässigkeitsannahme (Z8): Letzte Wachstumsrate

$$\lambda_r^+ > \max\left\{\dot\varphi_{r-1}^-, \ddot\varphi_{r-2}^-, \ldots, (\varphi_0^-)^{(r)}\right\}$$
$$-\lambda_r^- < \min\left\{\dot\varphi_{r-1}^+, \ddot\varphi_{r-2}^+, \ldots, (\varphi_0^+)^{(r)}\right\}$$

Zulässigkeitsannahmen **(Z1)-(Z8)**

„Zutaten“ für den Bang-Bang-Funnel-Regler

- Existenz und Kenntnis des Relativgrades
- Fehler e und dessen Ableitungen (bis zur $(r-1)$-sten)
- Funnelgrenzen $\varphi_i^\pm$ und deren Ableitungen
- Sicherheitsabstände $\varepsilon_i^\pm$ und minimale Wachstumsraten $\lambda_i^\pm$
- Zur Analyse: Einschwingzeiten $\Delta_i^\pm$

Bemerkung:

- Annahmen **(Z1)-(Z8)** unabhängig von U^+ und U^-
- Ebenfalls unhängig von Systemparametern
- Für (nahezu) beliebig gegeben Funnel $\mathcal{F}_0$ können restliche Funnels so konstruiert werden, so dass **(Z3)-(Z8)** erfüllt sind

Zulässigkeitsannahme (Z9)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x,u) \\ y &= H(x) \end{aligned} \quad \cong \quad \begin{aligned} y^{(r)} &= f(y,\dot{y},\ldots,y^{(r-1)},z) + g(y,\ldots,y^{(r-1)},z)u \\ \dot{z} &= h(y,\dot{y},\ldots,y^{(r-1)},z), \quad z_0 \in Z_0 \subseteq \mathbb{R}^{n-r} \end{aligned}$$

Zulässigkeitsannahme (Z9): Eingang „stark“ genug

$$U^+ \geq \frac{\lambda_r^+ + y_{\text{ref}}^{(r)}(t) - f(y_t^0, y_t^1, \ldots, y_t^{r-1}, z_t)}{g(y_t^0, y_t^1, \ldots, y_t^{r-1}, z_t)}$$

$$U^- \leq \frac{-\lambda_r^- + y_{\text{ref}}^{(r)}(t) - f(y_t^0, y_t^1, \ldots, y_t^{r-1}, z_t)}{g(y_t^0, y_t^1, \ldots, y_t^{r-1}, z_t)}$$

for all $t \geq 0$, $(y_t^0, y_t^1, \ldots, y_t^{r-1}) \in \Phi_t^{y_{\text{ref}}}$, $z_t \in Z_t^{y_{\text{ref}}}$

$$\Phi_t^{y_{\text{ref}}} := \left\{ (y_0,\ldots,y_{r-1}) \;\middle|\; \forall i: \; y_i - y_{\text{ref}}^{(i)}(t) \in [\varphi_i^-(t), \varphi_i^+(t)] \right\},$$

$$Z_t^{y_{\text{ref}}} := \left\{ z(t) \;\middle|\; \begin{array}{l} z \text{ solves } \dot{z} = h(y,\dot{y},\ldots,y^{(r-1)},z), z(0) = z_0 \in Z_0, \\ y \in \mathcal{C}^{r-1} \text{ with } (y(\tau),\ldots,y^{(r-1)}(\tau)) \in \Phi_\tau^{y_{\text{ref}}}, \; \tau \in [0,t] \end{array} \right\}$$

Hauptergebnis

Theorem (Bang-Bang-Funnel-Regler funktioniert, Lib. & T. 2013)

Zulässigkeitsannahmen:

- *Strukturelle Annahmen*
  - *Relativgrad r* **(Z1)**
  - *Glattheit von y_{ref}* **(Z2)**
- *Funnels passend* **(Z3)-(Z8)**
- *U^+ und U^- stark genug* **(Z9)**

$\Rightarrow$ *Bang-Bang-Funnel-Regler funktioniert*

Theorem (Zulässigkeit)

Nahezu beliebieges $\mathcal{F}_0$ + BIBO-Nulldynamik + Beschränktheit von y_{ref}
$\Rightarrow$ *Zulässigkeit gegeben mit genügend großen U^+ and U^-*

Simulation for $r = 4$

Beispiel (akademisch), endliche Entweichzeit für y möglich:

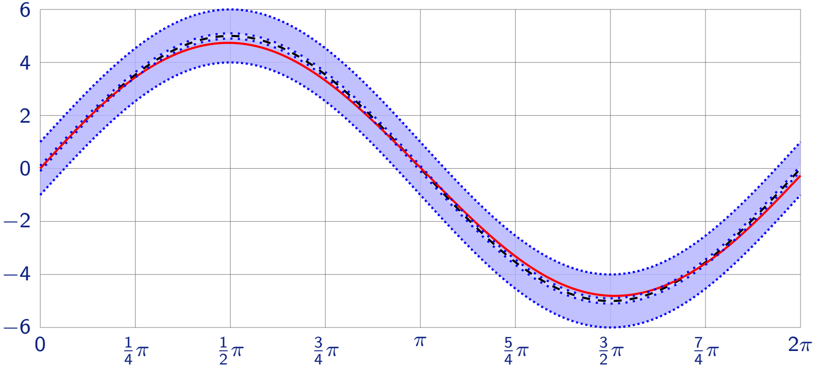
$$\begin{aligned} y^{(4)} &= z\,\dddot{y}^2 + e^z u, & y^{(i)}(0) &= y_{\mathrm{ref}}^{(i)}(0),\; i = 0,1,2,3,\\ \dot z &= z(a-z)(z+b) - cy, & z(0) &= 0,\\ y_{\mathrm{ref}}(t) &= 5\sin(t) \end{aligned}$$

Reglerparameter (konstante Funnels):

$$\begin{aligned} &\varphi_0^+ = -\varphi_0^- \equiv 1, && \varepsilon_0^+ = \varepsilon_0^- = 0.9, && && \Delta_0^+ = \Delta_0^- = \infty,\\ &\varphi_1^+ = -\varphi_1^- \equiv 0.5, && \varepsilon_1^+ = \varepsilon_1^- = 0.1, && \lambda_1^+ = \lambda_1^- = 0, && \Delta_1^+ = \Delta_1^- = \Delta_0^\pm/2 = \infty,\\ &\varphi_2^+ = -\varphi_2^- \equiv 0.5, && \varepsilon_2^+ = \varepsilon_2^- = 0.1, && \lambda_2^+ = \lambda_2^- = 0.2, && \Delta_2^+ = \Delta_2^- = 0.4,\\ &\varphi_3^+ = -\varphi_3^- \equiv 4.5, && \varepsilon_3^+ = \varepsilon_3^- = 0.1, && \lambda_3^+ = \lambda_3^- = 4, && \Delta_3^+ = \Delta_3^- = 0.1,\\ & && && \lambda_4^+ = \lambda_4^- = 102, && \Delta_4^+ = \Delta_4^- = 0.0001. \end{aligned}$$

$$U^+ = -U^- = 254$$

Simulationsergebnisse, Trajektorienfolgeregelung



Schaltfrequenz: bis zu 1000 Hz

Anzahl Schaltvorgänge insgesamt: ca. 2200

Simulationsergebnisse, Fehlerplot