Stabilität von geschalteten DAEs

Stephan Trenn (gemeinsam mit Daniel Liberzon und Fabian Wirth)

Institut für Mathematik, Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Elgersburg Workshop 2011, 16.02.2011, 17:30 - 18:00

Inhalt

Geschaltete DAEs

Homogene geschaltete lineare DAE (differential algebraic equation)

(swDAE) $\boxed{E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)}$ bzw. $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$

mit

- Schaltsignal $\sigma : \mathbb{R} \to \{1, 2, \ldots, N\}$
  - stückweise konstant, rechtsseitig stetig
  - lokal endlich viele Sprünge
- Matrizenpaare $(E_1, A_1), \ldots, (E_\mathrm{p}, A_\mathrm{p})$
  - $E_p, A_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $p = 1, \ldots, \mathrm{p}$
  - (E_p, A_p) regulär, d.h. $\det(E_p s - A_p) \not\equiv 0$

Motivation und Fragestellung

Wieso geschaltete DAEs $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$?

1. Modellierung elektrischer Schaltkreise mit Schaltern
2. DAEs $E\dot{x} = Ax + Bu$ mit geschalteter Rückführung

$$u(t) = F_{\sigma(t)} x(t) \quad \text{oder}$$
$$u(t) = F_{\sigma(t)} x(t) + G_{\sigma(t)} \dot{x}(t)$$

3. Approximation zeitvarianter DAEs $E(t)\dot{x} = A(t)x$ durch stückweise konstante DAEs

Fragestellung

$E_p \dot{x} = A_p x$ asymp. stabil $\forall p$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$ asymp. stabil

Beispiele

Beispiel 1:

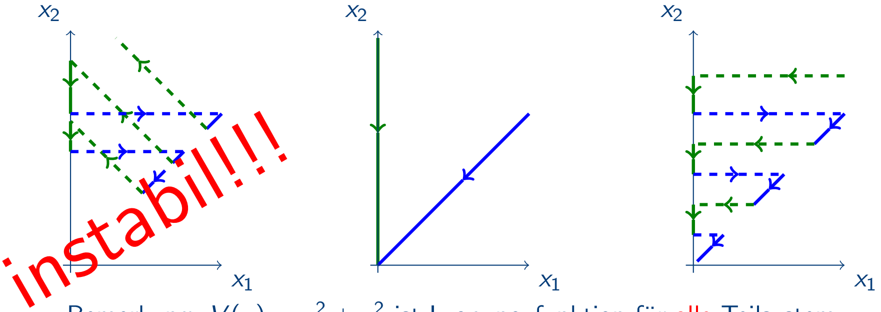
$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

Beispiel 2:

$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$



Bemerkung: $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ ist Lyapunovfunktion für alle Teilsystem

Lösungen bei klassischen DAEs

Betrachte zunächst $E\dot{x} = Ax$.

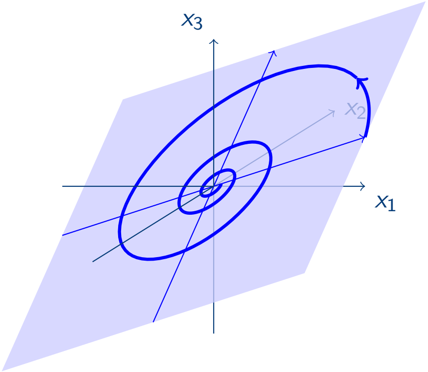
Theorem (Weierstraß 1868)

(E, A) *regulär* $\Leftrightarrow$
$\exists S, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertierbar:*

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right),$$

N *nilpotent*

$$(E, A) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4\pi & -4 & 0 \\ -1 & 4\pi & 0 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \right)$$



$$V = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} -1 & -4\pi \\ \pi & -1 \end{bmatrix}$$

Folgerung (für reguläre (E, A))

x *löst* $E\dot{x} = Ax \Leftrightarrow$

$$x(t) = Ve^{Jt}v_0$$

$V \in \mathbb{R}^{n\times n_1}$, $J \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $v_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$.
Konsistenzraum: $\mathfrak{C}_{(E,A)} := \operatorname{im} V$

Konsistenzprojektoren

Beobachtung

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot v \\ \dot w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

Konsistente Anfangswerte: $\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Beliebiger Anfangswert $\mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \overset{\Pi}{\mapsto} \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ konsistenter Anfangswert

Definition (Konsistenzprojektoren für reguläre (E, A))

Seien $S, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar mit $(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\right)$:

$$\Pi_{(E,A)} = T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$$

Bemerkung: $\Pi_{(E,A)}$ lässt sich einfach und direkt aus (E, A) berechnen

Lyapunov-Funktionen für reguläre (E, A)

Definition (Lyapunov-Funktion für $E\dot{x} = Ax$)

$Q = \overline{Q}^\top > 0$ auf $\mathfrak{C}_{(E,A)}$ und $P = \overline{P}^\top > 0$ löse

$$A^\top PE + E^\top PA = -Q \quad \text{(verallgemeinerte Lyapunovgleichung)}$$

Lyapunov-Funktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto (Ex)^\top PEx$

V monoton fallend entlang Lösungen:

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t)) &= (Ex(t))^\top PE\dot{x}(t) + (E\dot{x}(t))^\top PEx \\ &= x(t)^\top E^\top PAx(t) + x(t)^\top A^\top PEx(t) \\ &= -x(t)^\top Qx(t) \leq 0 \end{aligned}$$

Theorem (Owens & Debeljkovic 1985)

$E\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil $\Leftrightarrow$ $\exists$ *Lyapunov-Funktion*

Zwischenstand: Probleme und Lösungen

(swDAE) $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$

1. Stabilitätskriterium für einzelne DAEs $E_p \dot{x} = A_p x$
   $\Rightarrow$ Lyapunov-Funktionen
2. **Keine klassischen Lösungen**
   $\Rightarrow$ Erlaube Sprünge in Lösungen
3. Wie „springt“ inkonsistenter Anfangswert auf konsistenten?
   $\Rightarrow$ Konsistenzprojektoren $\Pi_{(E_1,A_1)}, \ldots, \Pi_{(E_N,A_N)}$
4. Differentiation von Sprüngen
   $\Rightarrow$ Raum der Distributionen als Lösungsraum
5. **Multiplikation mit nicht-glatten Koeffizienten**
   $\Rightarrow$ Raum der stückweise glatten Distributionen
   $\Rightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
   $\Rightarrow$ Deutlich größere Systemklasse kann betrachtet werden

Inhalt

Asymptotische Stabilität und impulsfreie Lösungen

Definition (Asymptotische Stabilität einer geschalteten DAE)

(swDAE) asymptotisch stabil $:\Leftrightarrow$ x ist impulsfrei und $x \to 0$ für $t \to \infty$

Im folgenden $\Pi_p := \Pi_{(E_p, A_p)}$ Konsistenzprojektor zu (E_p, A_p)

Impulsfreiheitsbedingung

(IFB): $\forall p, q \in \{1, \ldots, N\} : E_p(I - \Pi_p)\Pi_q = 0$

Theorem (T. 2009)

(IFB) $\Leftrightarrow$ *Alle Lösungen von $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$ sind impulsfrei $\forall \sigma$*

Stabilität unter beliebigem Schalten

Betrachte **(swDAE)** mit zusätzlicher Annahme:

($\exists$V$_\mathbf{p}$): $\forall p \in \{1,\dots,N\}$ $\exists$ Lyapunov-Funktion V_p für (E_p, A_p)

d.h. jede DAE (E_p, A_p) ist asymp. stabil

Lyapunov-Sprung-Bedingung

(LSB): $\forall p, q = 1,\dots,N\ \forall x \in \mathfrak{C}_{(E_q,A_q)}: \quad V_p(\Pi_p x) \leq V_q(x)$

Theorem (Liberzon & T. 2009)

(IFB) $\wedge$ **($\exists$V$_\mathbf{p}$)** $\wedge$ **(LSB)** $\quad\Rightarrow\quad$ **(swDAE)** *asymtotisch stabil*

Beispiele 1 und 2 erfüllen **(IFB)** und **($\exists$V$_\mathbf{p}$)**, aber nur 2 erfüllt **(LSB)**

Langsames Schalten

Betrachte die Menge der langsamen Schaltsignale, $\tau > 0$:

$$\Sigma^\tau := \left\{ \sigma : \mathbb{R} \to \{1, \ldots, N\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \text{ Schaltzeiten} \\ t_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z} : \\ t_{i+1} - t_i \geq \tau \end{array} \right\}.$$

Theorem (Liberzon & T. 2009)

$\exists \tau > 0\ \forall \sigma \in \Sigma^\tau$: **(IFB)** $\wedge$ **($\exists$V$_\mathbf{p}$)** $\Rightarrow$ **(swDAE)** *asymptotisch stabil*

Nochmal zur Erinnerung:
(IFB): $\forall p, q \in \{1, \ldots, N\} : E_p(I - \Pi_{(E_p,A_p)})\Pi_{(E_q,A_q)} = 0$

Wie gesagt, Beispiel 1 und 2 erfüllen beide **(IFB)** und **($\exists$V$_\mathbf{p}$)**
$\Rightarrow$ Beide Beispiele asymptotisch stabil unter langsamen Schalten

Inhalt

Kommutativität und Stabilität bei geschalteten ODEs

Theorem (Narendra und Balakrishnan 1994)

Betrachte geschalte ODE

(swODE) $\dot{x} = A_\sigma x$

mit A_p Hurwitz, $p \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{p}\}$ und kommutierenden A_p, i.e.

$$[A_p, A_q] := A_p A_q - A_q A_p = 0 \quad \forall p, q \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{p}\} \tag{K}$$

$\Rightarrow$ **(swODE)** *asymptotisch stabil* $\forall \sigma$.

Beweisidee: Betrachte Schaltzeiten $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t$ und $p_i := \sigma(t_i+)$, dann

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A_{p_k}(t-t_k)} e^{A_{p_{k-1}}(t_k-t_{k-1})} \cdots e^{A_{p_1}(t_2-t_1)} e^{A_{p_0}(t_1-t_0)} x_0 \\ &\overset{(K)}{=} e^{A_1 \Delta t_1} e^{A_2 \Delta t_2} \cdots e^{A_\mathrm{p} \Delta t_\mathrm{p}} x_0 \end{aligned}$$

und $\Delta t_p \to \infty$ für mindestens ein p und $t \to \infty$.

Verallgemeinerung auf **(swDAE)**

(swDAE) $$E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$$

Verallgemeinerung - Fragen

- Welche Matrizen müssen kommutieren?
- Was passiert mit den Sprüngen?

Beispiel 1: $(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$, $(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$

$[A_1, A_2] = 0$, aber instabiles Verhalten möglich

Die Matrix A^{diff}

Sei (E, A) regulär mit $(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\right)$, N nilpotent

Erinnerung Konsistenzprojektor: $\Pi_{(E,A)} = T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$

Definition (Differential-„Projektor“)

$$\Pi^{\mathrm{diff}}_{(E,A)} = T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S$$

Satz (Dynamik der DAE)

x löst $E\dot{x} = Ax \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \Pi^{\mathrm{diff}}_{(E,A)} Ax$

$$A^{\mathrm{diff}} := \Pi^{\mathrm{diff}}_{(E,A)} A = T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$$

Kommutativitätsbedingung

Betrachte wieder geschaltete DAE:

(swDAE) $$E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$$

Theorem (Liberzon, T., Wirth 2011)

(IFB) $\wedge$ **($\exists \mathbf{V_p}$)** $\wedge$

$$[A_p^{\text{diff}}, A_q^{\text{diff}}] = 0 \quad \forall p, q \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{p}\} \tag{(K)}$$

$\Rightarrow$ **(swDAE)** *ist asymptotisch stabil* $\forall \sigma$ *und* $\exists$ *gemeinsame Lyapunovfunktion mit*

$$V(\Pi_p x) \leq V(x) \quad \forall x \; \forall p$$

Interessant: Keine zusätzliche Bedingung an Sprünge!

Beweisskizze

Beweisidee: Aus

$$[A_p^{\text{diff}}, A_q^{\text{diff}}] = 0 \quad \forall p, q \in \{1, 2, \dots, \mathrm{p}\} \tag{K}$$

folgt auch

$$[\Pi_p, A_q^{\text{diff}}] = 0 \quad \wedge \quad [\Pi_p, \Pi_q] = 0 \quad \wedge \quad [A_p^{\text{diff}}, \Pi_q] = 0.$$

Betrachte Schaltzeiten $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t$ und $p_i := \sigma(t_i+)$, dann

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A_{p_k}^{\text{diff}}(t-t_k)} \Pi_{p_k} e^{A_{p_{k-1}}^{\text{diff}}(t_k-t_{k-1})} \Pi_{p_{k-1}} \cdots e^{A_{p_1}^{\text{diff}}(t_2-t_1)} \Pi_{p_1} e^{A_{p_0}^{\text{diff}}(t_1-t_0)} \Pi_{p_0} x_0 \\ &\overset{(K)}{=} e^{A_1^{\text{diff}} \Delta t_1} \Pi_1 \; e^{A_2^{\text{diff}} \Delta t_2} \Pi_2 \cdots e^{A_{\mathrm{p}}^{\text{diff}} \Delta t_{\mathrm{p}}} \Pi_{\mathrm{p}} x_0 \end{aligned}$$

und $\Delta t_p \to \infty$ für mindestens ein p und $t \to \infty$.

Konstruktion Lyapunovfunktion

$[A_1^{\text{diff}}, A_2^{\text{diff}}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists T$ invertierbar:

$$T A_1^{\text{diff}} T^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T A_2^{\text{diff}} T^{-1} = \begin{bmatrix} A_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A_{ij} Hurwitz und $[A_{11}, A_{21}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists P_1,\ P_2,\ P_3$ s.p.d.:

$$A_{11}^\top P_1 + P_1 A_{11} < 0 \quad \wedge \quad A_{21}^\top P_1 + P_1 A_{21} < 0$$
$$A_{12}^\top P_2 + P_2 A_{12} < 0$$
$$A_{33}^\top P_3 + P_3 A_{22} < 0$$

$\Rightarrow$

$$P = T^{-T} \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} T^{-1}$$

liefert gesuchte Lyapunovfunktion $V(x) = x^\top P x$.

Zusammenfassung

Wir betrachteten geschaltete DAEs

(swDAE) $$E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$$

- Lösungstheorie
  - Keine klassischen Lösungen: Sprünge und Impulse
  - Impulsfreiheitsbedingung
  - Sprünge weiterhin erlaubt
- Hinreichende Stabilitätsbedingung
  - Multiple Lyapunovfunktionen mit Sprungbedingung
  - Langsames Schalten
  - Kommutativität (insb. Lyapunovfunktionskonstruktion)
- In Arbeit: Allgemeine inverse Lyapunov-Resultate