Eine Lösungstheorie für geschaltete differential-algebraische Gleichungen

Stephan Trenn

Institut für Mathematik, Technische Universität Ilmenau

Oberseminar Analysis und Angewandte Mathematik,
Universiät Kassel, 22.06.2009

Inhalt

Geschaltete DAEs

Homogene geschaltete lineare DAE (differential algebraic equation):

(swDAE) $\qquad E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \quad$ bzw. $\quad E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$

mit

- Schaltsignal $\sigma : \mathbb{R} \to \{1, 2, \ldots, N\}$
  - stückweise konstant, rechtsseitig stetig
  - lokal endlich viele Sprünge
- Matrizenpaare $(E_1, A_1), \ldots, (E_N, A_N)$
  - $E_p, A_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $p = 1, \ldots, N$
  - (E_p, A_p) regulär, d.h. $\det(E_p s - A_p) \not\equiv 0$

Motivation und Fragestellung

Warum geschaltete DAEs $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$?

1. Modellierung elektrischer Schaltkreise mit Schaltern
2. DAEs $E\dot{x} = Ax + Bu$ mit geschalteter Rückführung

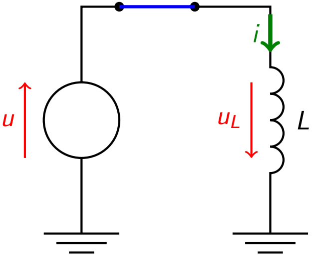
$$u(t) = F_{\sigma(t)} x(t) \quad \text{oder}$$
$$u(t) = F_{\sigma(t)} x(t) + G_{\sigma(t)} \dot{x}(t)$$

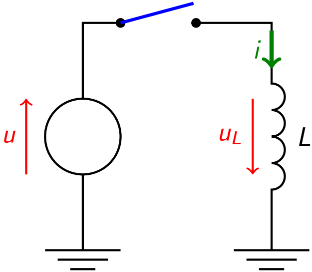
3. Approximation zeitvarianter DAEs $E(t)\dot{x} = A(t)x$ durch stückweise konstante DAEs

Fragestellung

1) Lösungstheorie
2) Impulsfreiheit von Lösungen

Elektrischer Schaltkreis mit Spule





$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$u_L = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i$ immer & Sprung in i $\Rightarrow$ Dirac-Impulse in u_L

Distributionentheorie informell

Distributionen - Überblick

- Verallgemeinerte Funktionen
- Beliebig oft differenzierbar
- Dirac-Impuls δ_0 ist „Ableitung“ der Sprungfunktion $\mathbb{1}_{[0,\infty)}$

Grundsätzlich zwei formale Zugänge

1. Funktionalanalytisch: Dualraum eines Raumes von Testfunktionen (L. Schwartz 1950)
2. Axiomatisch: Raum aller „Ableitungen“ von stetigen Funktionen (J.S. Silva 1954)

Distributionen - formal

Definition (Testfunktionen)

$\mathcal{C}_0^\infty := \{\ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist glatt mit kompakten Träger } \}$

Definition (Distributionen)

$\mathbb{D} := \{\ D : \mathcal{C}_0^\infty \to \mathbb{R} \mid D \text{ ist linear und stetig } \}$

Definition (Reguläre Distributionen)

$f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$: $\quad f_{\mathbb{D}} : \mathcal{C}_0^\infty \to \mathbb{R},\ \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f(t) \in \mathbb{D}$

Definition (Ableitung)

$D'(\varphi) := -D(\varphi')$

Dirac Impulse in $t_0 \in \mathbb{R}$

$\delta_{t_0} : \mathcal{C}_0^\infty \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \varphi(t_0)$

Multiplikation mit Funktionen

Definition (Multiplikation mit glatten Funktionen)

$\alpha \in \mathcal{C}^\infty: \quad \alpha D := (\varphi \mapsto D(\alpha\varphi))$

Koeffizienten nicht glatt

Problem: $E_\sigma, A_\sigma \notin \mathcal{C}^\infty$

Beobachtung:

$$\begin{array}{c} E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x \\ i \in \mathbb{Z}: \ \sigma_{[t_i, t_{i+1})} \equiv p_i \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{Z}: \ (E_{p_i}\dot{x})_{[t_i, t_{i+1})} = (A_{p_i}x)_{[t_i, t_{i+1})}$$

Neue Fragestellung: Einschränkung von Distributionen

Gewünschte Eigenschaften der distr. Einschränkung

Distributionelle Einschränkung:

$$\{\, M \subseteq \mathbb{R} \mid M \text{ messbar } \,\} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad (M, D) \mapsto D_M$$

wobei für jedes messbare $M \subseteq \mathbb{R}$ gelte

1. $D \mapsto D_M$ ist eine Projektion (linear und idempotent)
2. $\forall f \in L_{1,\mathrm{loc}}: \quad (f_{\mathbb{D}})_M = (f_M)_{\mathbb{D}}$
3. $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty: \quad \begin{bmatrix} \operatorname{supp}\varphi \subseteq M & \Rightarrow & D_M(\varphi) = D(\varphi) \\ \operatorname{supp}\varphi \cap M = \emptyset & \Rightarrow & D_M(\varphi) = 0 \end{bmatrix}$
4. $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt, $M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$:

$$D_{M_1 \cup M_2} = D_{M_1} + D_{M_2}, \quad D_M = \sum_{i\in\mathbb{N}} D_{M_i}, \quad (D_{M_1})_{M_2} = 0$$

Theorem

Eine solche distributionelle Einschränkung existiert nicht

Dilemma und Lösung

Geschaltete DAEs

- Beispiele: distributionelle Lösungen
- Multiplikation mit nicht-glatten Koeffizienten
- Oder: Einschränkungen auf Intervalle

Distributionen

- distributionelle Einschränkung nicht möglich
- Multiplikation mit nicht-glatten Koeffizienten unmöglich
- Anfangswertprobleme können nicht formuliert werden

Zugrundeliegendes Problem

Raum der Distributionen zu groß.

Definition (Stückweise glatte Distributionen $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$)

$$\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty} := \left\{ f_{\mathbb{D}} + \sum_{t\in T} D_t \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^\infty_{\text{pw}}, \\ T \subseteq \mathbb{R} \text{ locally finite}, \\ \forall t \in T : D_t = \sum_{i=0}^{n_t} a_i^t \delta_t^{(i)} \end{array} \right\}$$

Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$

- $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{pw}}$ „$\subseteq$“ $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$
- $D \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty} \Rightarrow D' \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$
- Einschränkung $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty} \to \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$, $D \mapsto D_M$ für alle Intervalle $M \subseteq \mathbb{R}$ wohldefiniert
- Multiplikation mit $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{pw}}$-Funktionen wohldefiniert
- Links- und rechtsseitige Auswertung an $t \in \mathbb{R}$: $D(t-), D(t+)$
- Impuls bei $t \in \mathbb{R}$: $D[t]$

Anwendung auf (swDAE)

x löst (swDAE) $\quad\Leftrightarrow\quad$ $x \in (\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty})^n$ und (swDAE) gilt in $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$

Relevante Fragestellung

Betrachte $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$.

- Existenz von Lösungen?
- Eindeutigkeit von Lösungen?
- Verhalten bei inkonsistenten Anfangswerten?
- Analyse von Sprüngen und Impulsen in Lösungen?
- Bedingungen für die Impuls- bzw. Sprungfreiheit von Lösungen?

Theorem (Existenz und Eindeutigkeit)

$\forall x^0 \in (\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty})^n \ \forall t_0 \in \mathbb{R} \ \exists! x \in (\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty})^n$:

$$\begin{aligned} x_{(-\infty,t_0)} &= {x^0}_{(-\infty,t_0)} \\ (E_\sigma \dot{x})_{[t_0,\infty)} &= (A_\sigma x)_{[t_0,\infty)} \end{aligned}$$

Bemerkung: Lösung x heißt konsistent genau dann, wenn $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$ auf ganz $\mathbb{R}$.

Inhalt

Konsistenzprojektor

Zu (E_i, A_i) wähle S_i, T_i invertierbar mit

$$(S_i E_i T_i, S_i A_i T_i) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)$$

Definition (Konsistenzprojektor)

$$\Pi_i := T_i \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_i^{-1}$$

Theorem

Für alle Lösungen x von (swDAE) gilt

$$x(t+) = \Pi_{\sigma(t)} x(t-)$$

Impuls- und Sprungfreiheit

Theorem (Impulsfreiheit)

Für (swDAE) gelte

$$\forall p, q \in \{1, \dots, N\} : E_p(I - \Pi_p)\Pi_q = 0,$$

dann ist jede (konsistente) Lösung $x \in (\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty})$ *impulsfrei.*

Wesentliche Beweisidee:
$x(t+) - x(t-) \in \operatorname{im}(I - \Pi_p)\Pi_q$ und $E_p\dot{x}[t] = 0 \Rightarrow x[t] = 0$.

Theorem (Sprungfreiheit)

Für (swDAE) gelte

$$\forall p, q \in \{1, \dots, N\} : (I - \Pi_p)\Pi_q = 0,$$

dann ist jede (konsistente) Lösung $x \in (\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty})$ *sprung- und impulsefrei.*

Beispiel

$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad \Rightarrow \quad \Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad \Rightarrow \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sprünge? $\quad (I - \Pi_1)\Pi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (I - \Pi_1)\Pi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Impulse? $\quad E_1(I - \Pi_1)\Pi_2 = 0, \quad E_2(I - \Pi_2)\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung:

- Motivation für geschaltete DAE (swDAE)
- Distributionelle Lösung: Nötig, aber zugleich unmöglich
- Lösung: Stückweise glatte Distributionen
- Anwendung der Lösungstheorie: Bedingungen für Impulsfreiheit von Lösungen

Ausblick und weitergehende Resultate

- Multiplaktion für $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$ definiert, z.B. ${\delta_t}^2 = 0$
- DAEs $E\dot{x} = Ax + f$ mit distributionellen Koeffizienten können untersucht werden, z.B. $\dot{x} = \delta_0 x$
- Stabilitätsuntersuchungen