Stabilität von geschalteten differential algebraischen Gleichungen

Stephan Trenn

Institut für Mathematik, Technische Universität Ilmenau

GAMM-FA „Dynamik und Regelungstheorie“, München, 28.03.2009, 10:20 - 10:45

Inhalt

1. Einleitung
   - Systemklasse: Definition und Motivation
   - Destabilisierte Beispiele
2. Klassische DAEs
   - Lösungen: Konsistenz und zugrundeliegende ODE
   - Lyapunov-Funktionen
3. Distributionelle Lösungen für geschaltetet DAEs
4. Stabilität von geschalteten DAEs
   - Impulsfreiheit
   - Beliebiges Schalten
   - Sprungfreies Schalten
   - Langsames Schalten

Geschaltete DAEs

Homogene geschaltete lineare DAE (differential algebraic equation):

(swDAE) $E_{\sigma(t)}\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$ bzw. $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$

mit

- Schaltsignal $\sigma : \mathbb{R} \to \{1, 2, \ldots, N\}$
  - stückweise konstant, rechtsseitig stetig
  - lokal endlich viele Sprünge
- Matrizenpaare $(E_1, A_1), \ldots, (E_N, A_N)$
  - $E_p, A_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $p = 1, \ldots, N$
  - (E_p, A_p) regulär, d.h. $\det(E_p s - A_p) \not\equiv 0$

Motivation und Fragestellung

Wieso geschaltete DAEs $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$?

1. Modellierung elektrischer Schaltkreise mit Schaltern
2. DAEs $E\dot{x} = Ax + Bu$ mit geschalteter Rückführung

$$u(t) = F_{\sigma(t)} x(t) \quad \text{oder}$$
$$u(t) = F_{\sigma(t)} x(t) + G_{\sigma(t)} \dot{x}(t)$$

3. Approximation zeitvarianter DAEs $E(t)\dot{x} = A(t)x$ durch stückweise konstante DAEs

Fragestellung

$E_p \dot{x} = A_p x$ asymp. stabil $\forall p \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$ asymp. stabil

Beispiel 1a und 1b

Beispiel 1a:

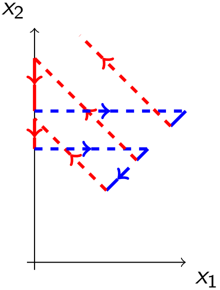
$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

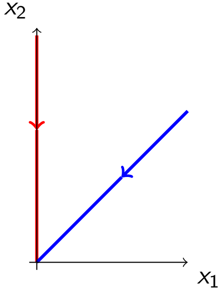
$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

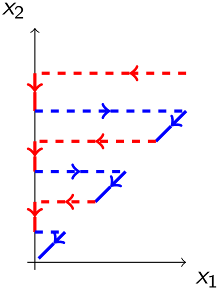
Beispiel 1b:

$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$



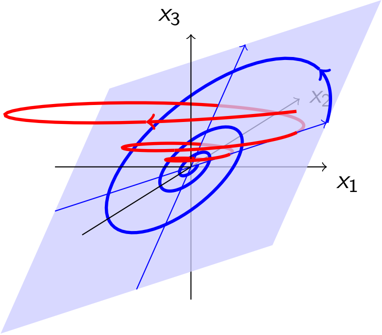


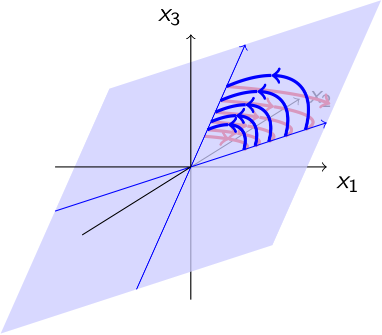


Beispiel 2

Beispiel 2:

$$(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 8\pi & 0 \\ \pi/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \qquad (E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4\pi & -4 & 0 \\ -1 & 4\pi & 0 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

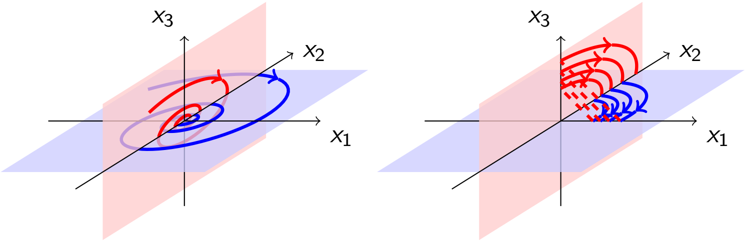




Beispiel 3

Beispiel 3:

$$\color{red}(E_1, A_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2\pi & 0 \\ -2\pi & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \qquad \color{blue}(E_2, A_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4\pi & -1 & 4\pi \\ -1 & \pi & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$



Lösungen bei klassischen DAEs

Betrachte zunächst $E\dot{x} = Ax$.

Theorem (Weierstraß 1868)

(E, A) regulär $\Leftrightarrow$
$\exists S, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar:

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right),$$

N nilpotent

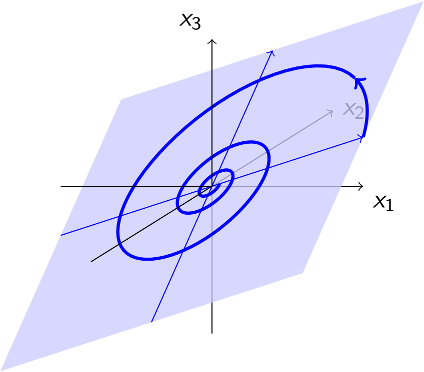
Folgerung (für reguläre (E, A))

x löst $E\dot{x} = Ax \Leftrightarrow$

$$x(t) = Ve^{Jt}v_0$$

$V \in \mathbb{R}^{n\times n_1}$, $J \in \mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $v_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$.
Konsistenzraum: $\mathfrak{C}_{(E,A)} := \operatorname{im} V$

$$(E, A) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4\pi & -4 & 0 \\ -1 & 4\pi & 0 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \right)$$



$$V = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; J = \begin{bmatrix} -1 & -4\pi \\ \pi & -1 \end{bmatrix}$$

Konsistenzprojektoren

Beobachtung

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot v \\ \dot w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

Konsistente Anfangswerte: $\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Beliebiger Anfangswert $\mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \overset{\Pi}{\mapsto} \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ konsistenter Anfangswert

Definition (Konsistenzprojektoren für reguläre (E, A))

Seien $S, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar mit $(SET, SAT) = \left(\left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right] \right)$:

$$\Pi_{(E,A)} = T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}$$

Bemerkung: $\Pi_{(E,A)}$ lässt sich einfach und direkt aus (E, A) berechnen

Lyapunov-Funktionen für reguläre (E, A)

Definition (Lyapunov-Funktion für $E\dot{x} = Ax$)

$Q = \overline{Q}^\top > 0$ auf $\mathfrak{C}_{(E,A)}$ und $P = \overline{P}^\top > 0$ löse

$$A^\top PE + E^\top PA = -Q \quad \text{(verallgemeinerte Lyapunovgleichung)}$$

Lyapunov-Funktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto (Ex)^\top PEx$

V monoton fallend entlang Lösungen:

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V\big(x(t)\big) &= \big(Ex(t)\big)^\top PE\dot{x}(t) + \big(E\dot{x}(t)\big)^\top PEx \\ &= x(t)^\top E^\top PAx(t) + x(t)^\top A^\top PEx(t) \\ &= -x(t)^\top Qx(t) \leq 0 \end{aligned}$$

Theorem (Owens & Debeljkovic 1985)

$E\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil $\quad \Leftrightarrow \quad \exists$ *Lyapunov-Funktion*

Zwischenstand: Probleme und Lösungen

1. Stabilitätskriterium für einzelne DAEs $E_p \dot{x} = A_p x$
   $\Rightarrow$ Lyapunov-Funktionen
2. **Keine klassischen Lösungen**
   $\Rightarrow$ Erlaube Sprünge in Lösungen
3. Wie "springt" inkonsistenter Anfangswert auf konsistenten?
   $\Rightarrow$ Konsistenzprojektoren $\Pi_{(E_1,A_1)}, \ldots, \Pi_{(E_N,A_N)}$
4. Differentiation von Sprüngen
   $\Rightarrow$ Raum der Distributionen als Lösungsraum
5. **Multiplikation mit nicht-glatten Koeffizienten**
   $\Rightarrow$ Raum der stückweise glatten Distributionen
   $\Rightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
   $\Rightarrow$ Deutlich größere Systemklasse kann betrachtet werden

Inhalt

1 Einleitung
- Systemklasse: Definition und Motivation
- Destabilisierte Beispiele

2 Klassische DAEs
- Lösungen: Konsistenz und zugrundeliegende ODE
- Lyapunov-Funktionen

3 Distributionelle Lösungen für geschaltetet DAEs

4 Stabilität von geschalteten DAEs
- Impulsfreiheit
- Beliebiges Schalten
- Sprungfreies Schalten
- Langsames Schalten

Asymptotische Stabilität und impulsfreie Lösungen

Definition (Asymptotische Stabilität einer geschalteten DAE)

(swDAE) asymptotisch stabil $:\Leftrightarrow$
$\forall$ distr. Lösungen x: $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ und x ist impulsfrei

Im folgenden $\Pi_p := \Pi_{(E_p,A_p)}$ Konsistenzprojektor zu (E_p, A_p)

Impulsfreiheitsbedingung

(IFB): $\forall p, q \in \{1, \ldots, N\} : E_p(I - \Pi_p)\Pi_q = 0$

Theorem (T. 2009)

(IFB) $\Rightarrow$ *Alle Lösungen von $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$ impulsfrei*

Stabilität unter beliebigem Schalten

Betrachte **(swDAE)** mit zusätzlicher Annahme:

($\exists$V$_\mathbf{p}$): $\forall p \in \{1, \ldots, N\}\ \exists$ Lyapunov-Funktion V_p für (E_p, A_p)

d.h. jede DAE (E_p, A_p) ist asymp. stabil

Lyapunov-Sprung-Bedingung

(LSB): $\forall p, q = 1, \ldots, N\ \forall x \in \mathfrak{C}_{(E_q,A_q)}: \quad V_p(\Pi_p x) \leq V_q(x)$

Theorem (Liberzon & T. 2009)

(IFB) $\wedge$ **($\exists$V$_\mathbf{p}$)** $\wedge$ **(LSB)** $\quad\Rightarrow\quad$ **(swDAE)** *asymtotisch stabil*

Beispiele 1a, 1b, 2 und 3 erfüllen **(IFB)** und **($\exists$V$_\mathbf{p}$)**,
aber nur 1b erfüllt **(LSB)**

Sprungfreies Schalten

Betrachte Spezialfall, dass Schalten keine Sprünge erzeugt. Für $x^0 \in \mathbb{R}^n$ definiere

$$\Sigma_{x^0} := \left\{ \sigma : \mathbb{R} \to \{1, \ldots, N\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \text{ Lösung } x \text{ von } \textbf{(swDAE)} \\ \text{mit } x(0) = x^0 \text{ und} \\ x \text{ hat keine Sprünge} \end{array} \right\}$$

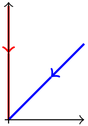
Schwache Lyapunov-Bedingung

(sLB): $\forall p, q = 1, \ldots, N \;\forall x \in \mathfrak{C}_{(E_p,A_p)} \cap \mathfrak{C}_{(E_q,A_q)} : \quad V_p(x) = V_q(x)$

Theorem (Liberzon & T. 2009)

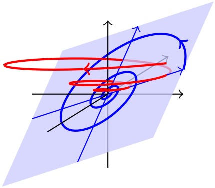
$\sigma \in \Sigma_{x^0} \wedge x$ *Lösung von* **(swDAE)** *mit* $x(0) = x^0 \wedge (\exists \mathbf{V_p}) \wedge$ **(sLB)**
$\Rightarrow \quad x(t) \to 0$ *und* x *impulsfrei*

Anwendung auf Beispiele



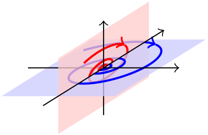
Beispiele 1a und 1b:

- $(\exists \mathbf{V_p})$ und **(sLB)** erfüllt
- ABER: $\Sigma_{x^0} = \emptyset$ falls $x^0 \neq 0$
- d.h.: Ergebnis nicht sinnvoll



Beispiel 2:

- $(\exists \mathbf{V_p})$ und $\Sigma_{x^0} \neq \emptyset$ für einige x^0
- ABER: **(sLB)** nicht erfüllbar



Beispiel 3:

- Alle Voraussetzungen erfüllt!
- $\Rightarrow$ Alle sprungfreien Lösungen asymp. stabil

Langsames Schalten

Betrachte die Menge der langsamen Schaltsignale, $\tau > 0$:

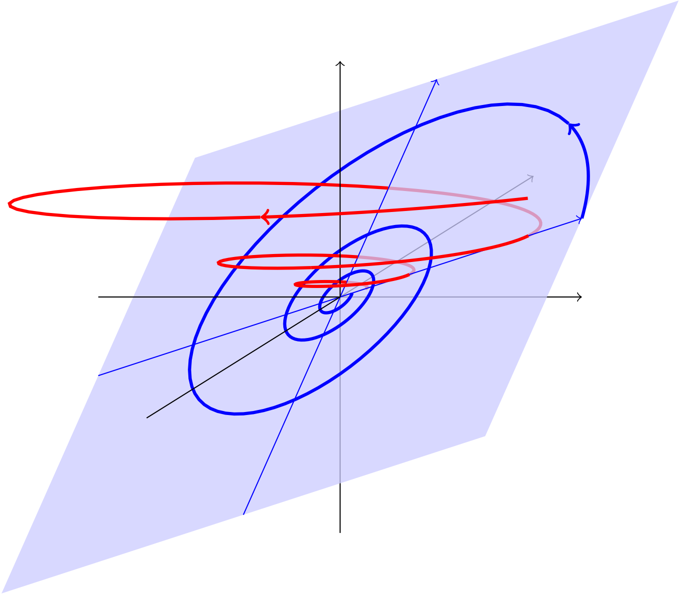
$$\Sigma^\tau := \left\{ \sigma : \mathbb{R} \to \{1, \ldots, N\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \text{ Schaltzeiten} \\ t_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z} : \\ t_{i+1} - t_i \geq \tau \end{array} \right\}.$$

Theorem (Liberzon & T. 2009)

$\exists \tau > 0 \; \forall \sigma \in \Sigma^\tau$: **(IFB)** $\wedge$ **($\exists \mathbf{V_p}$)** $\Rightarrow$ **(swDAE)** *asymptotisch stabil*

Nochmal zur Erinnerung:
(IFB): $\forall p, q \in \{1, \ldots, N\} : E_p(I - \Pi_{(E_p,A_p)})\Pi_{(E_q,A_q)} = 0$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



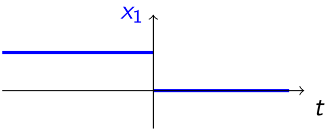
Distributionelle Lösungen

Beispiel (Inkonsistente Anfangswerte)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \left(\Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \dot{x}_1 \end{aligned} \right) \quad \text{auf } [0, \infty)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{auf } (-\infty, 0)$$

Offensichtlich: $x_1 = \mathbb{1}_{(-\infty,0)}$



$$x_2 = \begin{cases} 0, & \text{auf } (-\infty, 0) \\ \dot{x}_1 = -\delta_0, & \text{auf } [0, \infty) \end{cases}$$

also: $x_2 = \delta_0$ (Dirac Impulse)

Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen

Im folgenden: Raum der stückweise glatten Distributionen als Lösungsraum.

Betrachte nun wieder $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$ mit

- $\sigma : \mathbb{R} \to \{1, \ldots, N\}$, lokal endlich viele Sprünge
- $(E_1, A_1), \ldots, (E_N, A_N)$ regulär

Theorem (T. 2009)

Für jede Anfangstrajektorie $x^0 : (-\infty, 0) \to R^n$ existiert eine eindeutige distributionelle Lösung von

$$\begin{aligned} x &= x^0 && \textit{auf } (-\infty, 0) \\ E_\sigma \dot{x} &= A_\sigma x && \textit{auf } [0, \infty) \end{aligned}$$

Bemerkung:

x distr. Lösung von $E_\sigma \dot{x} = A_\sigma x$

$$\Rightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R} : x(t+) = \Pi_{(E_{\sigma(t)}, A_{\sigma(t)})} x(t-)$$

Berechnung der Konsistenzprojektoren

Theorem (Quasi-Weierstraß form, Berger, Ilchmann, T. 2009)

Sei (E, A) *regulär.*

$$\mathcal{V}_0 := \mathbb{R}^n, \qquad \mathcal{V}_{k+1} := A^{-1}(E\mathcal{V}_k),\ k = 0, 1, \ldots, k^*$$
$$\mathcal{W}_0 := \{0\}, \qquad \mathcal{W}_{k+1} := E^{-1}(A\mathcal{W}_k),\ k = 0, 1, \ldots, k^*.$$

Sei im $V = \mathcal{V}_{k^*}$, im $W = \mathcal{W}_{k^*}$ *und* $T := [V, W]$, $S^{-1} := [EV, AW]$ *dann*

$$(SET, SAT) = \left(\begin{bmatrix} I & \\ & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & \\ & I \end{bmatrix} \right).$$

Bemerkungen:

- $\mathcal{V}_k \supseteq \mathcal{V}_{k+1}$ und $\mathcal{W}_k \subseteq \mathcal{W}_{k+1}$
- V und W lassen sich mit einfachen Matlab-Programmen berechnen
- Also auch $\Pi_{(E,A)} = T \left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] T^{-1}$ einfach berechenbar

Matlab Code zum Berechnen der Konsistenzprojektoren

Berechnung einer Basis des Urbildes A^{-1}(im S):

```
function V=getPreImage(A,S)
[m1,n1]=size(A); [m2,n2]=size(S);
if m1==m2 | m2==0
    H=null([A,S]);
    V=colspace(H(1:n1,:));
end;
```

Berechnung von V mit im $V = \mathcal{V}_{k^*}$:

```
function V = getVspace(E,A)
[m,n]=size(E);
if (m==n) & size(E)==size(A)
    V=eye(n,n);
    oldsize=n; newsize=n; finished=0;
    while finished==0;
       EV=colspace(E*V);
       V=getPreImage(A,EV);
       oldsize=newsize;
       newsize=rank(V);
       finished = (newsize==oldsize);
    end;
end;
```

Berechnung von W mit im $W = \mathcal{W}_{k^*}$ analog.