Steuerbarkeit bei distributionellen differential-algebraischen Gleichungen

Stephan Trenn

Institut für Mathematik, Technische Universität Ilmenau

Elgersburg, 11. Februar 2008

Gliederung

Differential-algebraische Gleichungen

$$\begin{aligned} E\,\dot{x} &= A\,x + B\,u + v \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad E \text{ singulär} \qquad (1)$$

Differential-algebraische Gleichungen

$$\begin{aligned} E\,\dot{x} &= A\,x + B\,u + v \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad E \text{ singulär} \qquad (1)$$

Welcher Lösungsraum?

Differential-algebraische Gleichungen

$$\begin{aligned} E\,\dot{x} &= A\,x + B\,u + v \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad E \text{ singulär} \qquad (1)$$

Welcher Lösungsraum?
Welcher Typ Koeffizienten?

Differential-algebraische Gleichungen

$$\begin{aligned} E\,\dot{x} &= A\,x + B\,u + v \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad E \text{ singulär} \qquad (1)$$

Welcher Lösungsraum?
Welcher Typ Koeffizienten?

Anforderungen an Lösungsraum $\mathcal{L}$

- Distributionelle Lösungen

Differential-algebraische Gleichungen

$$\begin{aligned} E\,\dot{x} &= A\,x + B\,u + v \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad E \text{ singulär} \qquad (1)$$

Welcher Lösungsraum?
Welcher Typ Koeffizienten?

Anforderungen an Lösungsraum $\mathcal{L}$

- Distributionelle Lösungen, d.h. $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{D} = \{\text{Distributionen auf } \mathbb{R}\}$

Differential-algebraische Gleichungen

$$\begin{aligned} E\,\dot{x} &= A\,x + B\,u + v \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad E \text{ singulär} \qquad (1)$$

Welcher Lösungsraum?
Welcher Typ Koeffizienten?

Anforderungen an Lösungsraum $\mathcal{L}$

- Distributionelle Lösungen, d.h. $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{D} = \{\text{Distributionen auf } \mathbb{R}\}$
- Inkonsistente Anfangswerte

Differential-algebraische Gleichungen

$$\begin{aligned} E\,\dot{x} &= A\,x + B\,u + v \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad E \text{ singulär} \qquad (1)$$

Welcher Lösungsraum?
Welcher Typ Koeffizienten?

Anforderungen an Lösungsraum $\mathcal{L}$

- Distributionelle Lösungen, d.h. $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{D} = \{\text{Distributionen auf } \mathbb{R}\}$
- Inkonsistente Anfangswerte, d.h. Einschränkung auf Intervalle

Differential-algebraische Gleichungen

$$\begin{aligned} E\,\dot{x} &= A\,x + B\,u + v \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad E \text{ singulär} \qquad (1)$$

Welcher Lösungsraum?
Welcher Typ Koeffizienten?

Anforderungen an Lösungsraum $\mathcal{L}$

- Distributionelle Lösungen, d.h. $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{D} = \{\text{Distributionen auf } \mathbb{R}\}$
- Inkonsistente Anfangswerte, d.h. Einschränkung auf Intervalle
- Geschaltete Systeme (switched systems)

Differential-algebraische Gleichungen

$$\begin{aligned} E\,\dot{x} &= A\,x + B\,u + v \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad E \text{ singulär} \qquad (1)$$

Welcher Lösungsraum?
Welcher Typ Koeffizienten?

Anforderungen an Lösungsraum $\mathcal{L}$

- Distributionelle Lösungen, d.h. $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{D} = \{\text{Distributionen auf } \mathbb{R}\}$
- Inkonsistente Anfangswerte, d.h. Einschränkung auf Intervalle
- Geschaltete Systeme (switched systems), d.h. Koeffizienten unstetig

Erinnerung: Distributionen

Definition

- Testfunktionen:

$$\mathcal{C}_0^\infty := \{\ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R})\ \mid \text{supp}\, f\ \text{ ist kompakt}\ \}$$

- Distributionen:

$$\mathbb{D} := \{\ D : \mathcal{C}_0^\infty \to \mathbb{R}\ \mid D \text{ ist linear und stetig}\ \}$$

- Distributionen mit gegebenen Träger $M \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{D}_M := \{\ D \in \mathbb{D}\ \mid \text{supp}\, D \subseteq M\ \}$$

Erinnerung: Distributionen

Definition

- Testfunktionen:

$$\mathcal{C}_0^\infty := \{\ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R})\ \mid \operatorname{supp} f \text{ ist kompakt }\ \}$$

- Distributionen:

$$\mathbb{D} := \{\ D : \mathcal{C}_0^\infty \to \mathbb{R}\ \mid D \text{ ist linear und stetig }\ \}$$

- Distributionen mit gegebenen Träger $M \subseteq \mathbb{R}$:

$$\mathbb{D}_M := \{\ D \in \mathbb{D}\ \mid \operatorname{supp} D \subseteq M\ \}$$

Satz (Distributionen mit Punktträger)

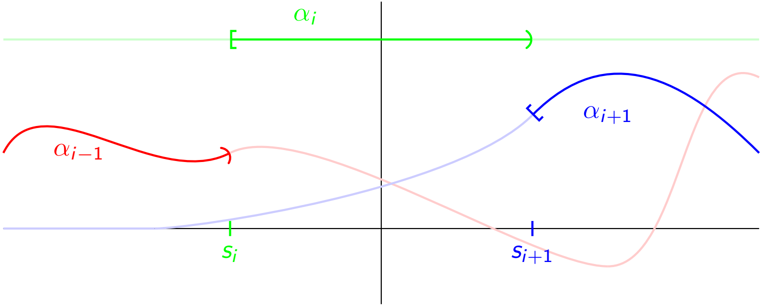
$D \in \mathbb{D}_{\{t\}},\ t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \exists\, \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : D = \sum_{i=0}^n \alpha_i \delta_t^{(i)}$

Dirac-Impulse und dessen Ableitungen: $\delta_t^{(i)}(\varphi) = (-1)^i \varphi^{(i)}(t)$

Vorbetrachtung: Stückweise glatte Funktionen

Definition (Stückweise glatte Funktionen)

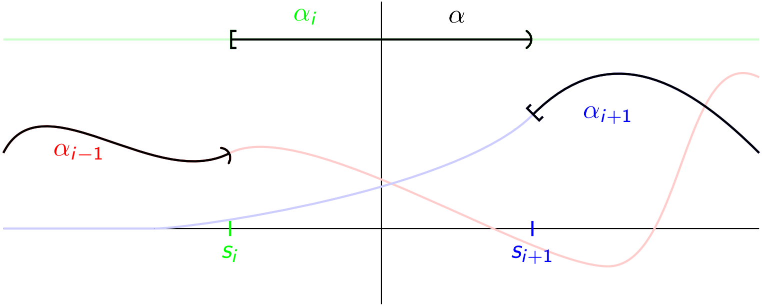
$$\mathcal{C}^\infty_{\text{pw}} := \left\{ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \text{ zulässiges } S = \{\ s_i \ \mid i \in \mathbb{Z}\ \} \\ \exists\, (\alpha_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \left(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R})\right)^{\mathbb{Z}} : \\ \quad \alpha = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{[s_i, s_{i+1})} \alpha_i \end{array} \right\}$$



Vorbetrachtung: Stückweise glatte Funktionen

Definition (Stückweise glatte Funktionen)

$$\mathcal{C}^\infty_{\text{pw}} := \left\{ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \text{ zulässiges } S = \{\, s_i \mid i \in \mathbb{Z} \,\} \\ \exists\, (\alpha_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \left(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R})\right)^{\mathbb{Z}} : \\ \quad \alpha = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{[s_i, s_{i+1})} \alpha_i \end{array} \right\}$$



Lösungsraum: Stückweise glatte Distributionen

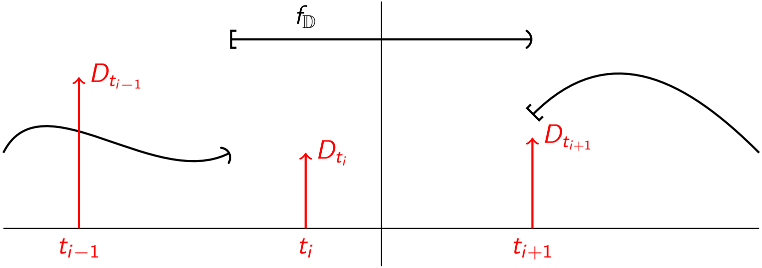
Definition (Stückweise glatte Distributionen $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$)

$D \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty} \subset \mathbb{D}$ ist eine stückweise glatte Distribution

$:\Longleftrightarrow$

$\exists\, f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{pw}}$ $\exists$ **zulässiges** $T \subseteq \mathbb{R}$ $\exists \left\{ D_t \in \mathbb{D}_{\{t\}} \;\middle|\; t \in T \right\}$:

$$D = f_{\mathbb{D}} + \sum_{t \in T} D_t$$



Eigenschaften von stückweise glatten Distributionen

Satz (Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$)

Sei $D = f_{\mathbb{D}} + \sum_{t\in T} D_t \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$.

Eigenschaften von stückweise glatten Distributionen

Satz (Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$)

Sei $D = f_{\mathbb{D}} + \sum_{t \in T} D_t \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$.

- **Abgeschlossenheit bezüglich Differentiation und Integration:** $D' \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$ *und* $\int_{t_0} D \in \mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$

Eigenschaften von stückweise glatten Distributionen

Satz (Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$)

Sei $D = f_{\mathbb{D}} + \sum_{t\in T} D_t \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$.

- **Abgeschlossenheit bezüglich Differentiation und Integration:**
  $D' \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$ *und* $\int_{t_0} D \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$
- **Punktweise Auswertung möglich***:*
  $t_0 \in \mathbb{R}: \quad D(t_0-), D(t_0+) \in \mathbb{R}$ *und* $D[t_0] \in \mathbb{D}_{\{t_0\}}$

Eigenschaften von stückweise glatten Distributionen

Satz (Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$)

Sei $D = f_{\mathbb{D}} + \sum_{t\in T} D_t \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$.

- **Abgeschlossenheit bezüglich Differentiation und Integration:**
  $D' \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$ *und* $\int_{t_0} D \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$
- **Punktweise Auswertung möglich**:
  $t_0 \in \mathbb{R}: \quad D(t_0-), D(t_0+) \in \mathbb{R}$ *und* $D[t_0] \in \mathbb{D}_{\{t_0\}}$
- **Einschränkung auf Intervalle möglich:**
  $M \subseteq \mathbb{R}$ *Interval*$: \quad D_M \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty} \cap \mathbb{D}_M$

Eigenschaften von stückweise glatten Distributionen

Satz (Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$)

Sei $D = f_{\mathbb{D}} + \sum_{t\in T} D_t \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$.

- **Abgeschlossenheit bezüglich Differentiation und Integration:**
  $D' \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$ *und* $\int_{t_0} D \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$
- **Punktweise Auswertung möglich**:
  $t_0 \in \mathbb{R}: \quad D(t_0-), D(t_0+) \in \mathbb{R}$ *und* $D[t_0] \in \mathbb{D}_{\{t_0\}}$
- **Einschränkung auf Intervalle möglich:**
  $M \subseteq \mathbb{R}$ *Interval* $: \quad D_M \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty} \cap \mathbb{D}_M$
- **Multiplikation mit stückweise glatten Funktionen möglich:**
  $\alpha \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{pw}}: \quad \alpha D \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$

Eigenschaften von stückweise glatten Distributionen

Satz (Eigenschaften von $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$)

Sei $D = f_{\mathbb{D}} + \sum_{t\in T} D_t \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$.

- **Abgeschlossenheit bezüglich Differentiation und Integration:**
  $D' \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$ *und* $\int_{t_0} D \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$
- **Punktweise Auswertung möglich***:*
  $t_0 \in \mathbb{R}: \quad D(t_0-), D(t_0+) \in \mathbb{R}$ *und* $D[t_0] \in \mathbb{D}_{\{t_0\}}$
- **Einschränkung auf Intervalle möglich:**
  $M \subseteq \mathbb{R}$ *Interval*$: \quad D_M \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty} \cap \mathbb{D}_M$
- **Multiplikation mit stückweise glatten Funktionen möglich:**
  $\alpha \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{pw}}: \quad \alpha D \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$

Achtung

Definition von Einschränkung für allgemeinen Distributionen ist nicht möglich.

Beispiel: $D = \sum_{i\in\mathbb{N}} d_n \delta_{d_n} \in \mathbb{D}\backslash\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}, \quad d_n := \frac{(-1)^n}{n}$

Distributionelle DAE

Distributionelle DAE

$$\begin{aligned} E(\cdot)X' &= A(\cdot)X + B(\cdot)U + V \\ Y &= C(\cdot)X \end{aligned}$$

E, A, B, C Matrizen über $\mathcal{C}^\infty_{\text{pw}}$

X, U, V, Y Vektoren über $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$

Distributionelle DAE

Distributionelle DAE

$$\begin{aligned} E(\cdot)X' &= A(\cdot)X + B(\cdot)U + V \\ Y &= C(\cdot)X \end{aligned}$$

E, A, B, C Matrizen über $\mathcal{C}^\infty_{\text{pw}}$

X, U, V, Y Vektoren über $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$

Fußnote: Es ist sogar möglich, **distributionelle Koeffizienten** zuzulassen.

Distributionelle DAE

Distributionelle DAE

$$\begin{aligned} E(\cdot)X' &= A(\cdot)X + B(\cdot)U + V \\ Y &= C(\cdot)X \end{aligned}$$

E, A, B, C Matrizen über $\mathcal{C}^\infty_{\text{pw}}$

X, U, V, Y Vektoren über $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$

Historische Anmerkung

Ähnliche Ansätze zu einem distributionellen Lösungsraum in *Hinrichsen* und *Prätzel-Wolters* 1980, *Cobb* 1984, *Rabier* und *Rheinboldt* 2002

Lösungstheorie

„Behavior“ Sichtweise (Willems 1986)

Betrachtung des „Behaviors“ $\mathcal{B}$, d.h., die Menge aller Lösungstrajektorien

$$\mathcal{B} := \left\{ W = \begin{pmatrix} X \\ U \\ V \\ Y \end{pmatrix} \in \left(\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}\right)^N \;\middle|\; \begin{aligned} EX' &= AX + BU + V, \\ Y &= CX \end{aligned} \right\}$$

Lösungstheorie

„Behavior“ Sichtweise (Willems 1986)

Betrachtung des „Behaviors“ $\mathcal{B}$, d.h., die Menge aller Lösungstrajektorien

$$\mathcal{B} := \left\{ W = \begin{pmatrix} X \\ U \\ V \\ Y \end{pmatrix} \in \left(\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}\right)^N \;\middle|\; \begin{array}{r} EX' = AX + BU + V, \\ Y = CX \end{array} \right\}$$

Klassische Sichtweise - Annahmen

- **Existenz** einer Lösung für alle Inhomogenitäten V
- **Eindeutigkeit**, d.h. X_1, X_2 Lösungen für vorgegebes U und V:

$$\exists t_0 \in \mathbb{R} : {X_1}_{(-\infty,t_0)} = {X_2}_{(-\infty,t_0)} \quad \Rightarrow \quad X_1 = X_2$$

Gliederung

Begriff der Steuerbarkeit

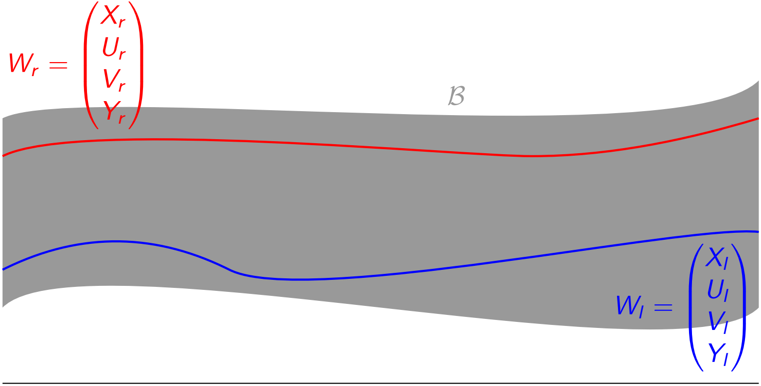
Steuerbarkeit im Sinne der „Behavior“ Sichtweise

Kann jede Trajektorie in endlicher Zeit in eine beliebige andere mittels einer dritten Trajektorie überführt werden?

Begriff der Steuerbarkeit

Steuerbarkeit im Sinne der „Behavior“ Sichtweise

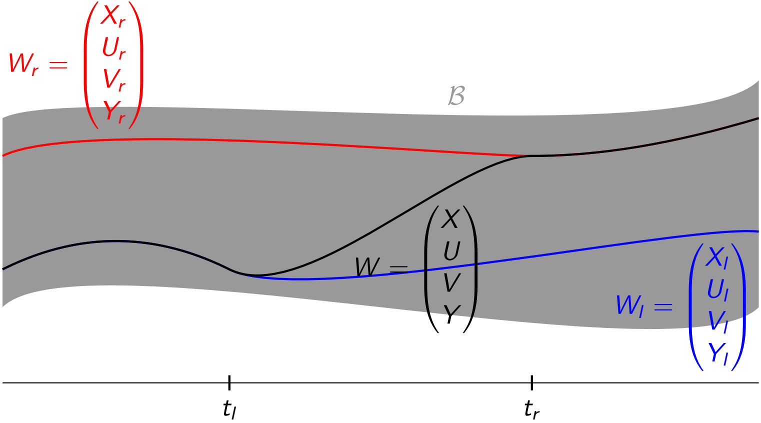
Kann jede Trajektorie in endlicher Zeit in eine beliebige andere mittels einer dritten Trajektorie überführt werden?



Begriff der Steuerbarkeit

Steuerbarkeit im Sinne der „Behavior“ Sichtweise

Kann jede Trajektorie in endlicher Zeit in eine beliebige andere mittels einer dritten Trajektorie überführt werden?



Begriff der Steuerbarkeit

Steuerbarkeit im Sinne der „Behavior“ Sichtweise

Kann jede Trajektorie in endlicher Zeit in eine beliebige andere mittels einer dritten Trajektorie überführt werden?

Steuerbarkeit im klassischen Sinne

Kann von jedem Anfangswert durch geeignete Wahl von U jeder Zustand in endlicher Zeit erreicht werden?

Begriff der Steuerbarkeit

Steuerbarkeit im Sinne der „Behavior“ Sichtweise

Kann jede Trajektorie in endlicher Zeit in eine beliebige andere mittels einer dritten Trajektorie überführt werden?

Steuerbarkeit im klassischen Sinne

Kann von jedem Anfangswert durch geeignete Wahl von U jeder Zustand in endlicher Zeit erreicht werden?

Weitere Konzepte:

- R-steuerbar
- Impuls-steuerbar

Steuerbarkeit bei distributionellen DAEs

Problem

Keiner der vorgenannten Steuerbarkeitsbegriffe ist für distributionelle DAEs vollständig geeignet, denn

- distributionelle Eingänge werden nicht berücksichtigt oder
- distributionelle Zustände werden nicht berücksichtigt.

$\Rightarrow$ Neue Definitionen für Steuerbarkeit nötig!

Erste Ideen zur Steuerbarkeit

Definition (Sprung-Steuerbarkeit)

$EX' = AX + BU + V$ heißt sprung-steuerbar in $t_0 \in \mathbb{R}$

$\iff$

$\forall\, V$ aus $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$ $\quad \forall\, x_0^- \in \mathbb{R}^n \quad \forall \Delta x \in \mathbb{R}^n \quad \exists\,$Steuerung U aus $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$
$\exists\,$Lösung X des inkonsistenten AWP $EX' = AX + BU + V, X(t_0-) = x_0^-$
mit:

$$X(t_0+) - X(t_0-) = \Delta x$$

Erste Ideen zur Steuerbarkeit

Definition (Sprung-Steuerbarkeit)

$EX' = AX + BU + V$ heißt sprung-steuerbar in $t_0 \in \mathbb{R}$

$\iff$

$\forall\, V$ aus $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$ $\quad \forall\, x_0^- \in \mathbb{R}^n \quad \forall \Delta x \in \mathbb{R}^n \quad \exists$ Steuerung U aus $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$
$\exists$ Lösung X des inkonsistenten AWP $EX' = AX + BU + V, X(t_0-) = x_0^-$
mit:

$$X(t_0+) - X(t_0-) = \Delta x$$

Satz (Sprung-Steuerbarkeit für klassische ODEs)

klassische zeitinvariante ODE $x' = Ax + Bu$ steuerbar

$\iff$

distributionelle ODE $X' = AX + BU + V$ sprung-steuerbar

Fragestellungen zur Sprung-Steuerbarkeit

Impulsfreiheit in t_0

Lässt sich ein U finden, mit

$$X(t_0+) - X(t_0-) = \Delta x$$

und

$$X[t_0] = 0?$$

Fragestellungen zur Sprung-Steuerbarkeit

Impulsfreiheit in t_0

Lässt sich ein U finden, mit

$$X(t_0+) - X(t_0-) = \Delta x$$

und

$$X[t_0] = 0?$$

Notwendige Impuls-Ordnung vom Eingang

Was ist minimales n, so dass

$$U = u_{\mathbb{D}} + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \delta_{t_0}^{(i)}$$

den geforderten Sprung Δx realisiert?

Weitergehende Steuerbarkeitsbegriffe

Ableitungs-Sprünge vorgeben

Statt $X(t_0+) - X(t_0-)$, die Differenz der q-ten Ableitung vorgeben:

$$X^{(q)}(t_0+) - X^{(q)}(t_0-) \overset{!}{=} \Delta x$$

Weitergehende Steuerbarkeitsbegriffe

Ableitungs-Sprünge vorgeben

Statt $X(t_0+) - X(t_0-)$, die Differenz der q-ten Ableitung vorgeben:

$$X^{(q)}(t_0+) - X^{(q)}(t_0-) \stackrel{!}{=} \Delta x$$

Stammfunktion-Sprünge vorgeben

Statt $X(t_0+) - X(t_0-)$, die Differenz der q-ten Stammfunktion vorgeben:

$$\Bigg(\underbrace{\int_{t_0} \cdots \int_{t_0}}_{q} X\Bigg)(t_0+) - \Bigg(\underbrace{\int_{t_0} \cdots \int_{t_0}}_{q} X\Bigg)(t_0-) \stackrel{!}{=} \Delta x$$

Entspricht: Impulse einer bestimmten Ordnung in t_0 vorgeben!

Zusammenfassung

- Geeigneter Lösungraum $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$ definiert:
  - Erlaubt saubere Behandlung von distributionellen Lösungen
  - Erlaubt inkonsistente Anfangswerte
  - Erlaubt unstetige Koeffizienten (geschaltete Systeme)

Zusammenfassung

- Geeigneter Lösungraum $\mathbb{D}_{\text{pw}\mathcal{C}^\infty}$ definiert:
  - Erlaubt saubere Behandlung von distributionellen Lösungen
  - Erlaubt inkonsistente Anfangswerte
  - Erlaubt unstetige Koeffizienten (geschaltete Systeme)
- Neue Steuerbarkeitsbegriffe nötig, denn:
  - Im Eingang nun auch Distributionen erlaubt
  - Steuern von Impulsen an einer Stelle

Zusammenfassung

- Geeigneter Lösungraum $\mathbb{D}_{\mathrm{pw}\mathcal{C}^\infty}$ definiert:
  - Erlaubt saubere Behandlung von distributionellen Lösungen
  - Erlaubt inkonsistente Anfangswerte
  - Erlaubt unstetige Koeffizienten (geschaltete Systeme)
- Neue Steuerbarkeitsbegriffe nötig, denn:
  - Im Eingang nun auch Distributionen erlaubt
  - Steuern von Impulsen an einer Stelle
- Offene Fragen:
  - Algebraische Bedingungen für die verschiedene Steuerbarkeitskonzepte
  - „Behavior“-Sichtweise