Anfangswertprobleme bei differential-algebraischen Gleichungen (DAEs)

Stephan Trenn

Institut für Mathematik, Technische Universität Ilmenau

Elgersburg, 13. Februar 2006

Gliederung

Differential-algebraische Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&E(\cdot)\,\dot{x} = A(\cdot)\,x + B(\cdot)\,u \\
&E, A \in C^{\omega}(\mathbb{R};\mathbb{R}^{n\times n}),\ B \in C^{\omega}(\mathbb{R};\mathbb{R}^{n\times m})
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Theorem (Campbell-Petzold 1983)

(1) *analytisch lösbar*

$\iff$

$\exists U \in C^{\omega}(\mathbb{R}, Gl_n)$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = U^{-1}x$:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= A_1(\cdot)\,x_1 + B_1(\cdot)\,u, \\
N(\cdot)\,\dot{x}_2 &= x_2 + B_2(\cdot)\,u,
\end{aligned}
\qquad N = \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}
$$

Das schnelle System

Im folgende betrachte nur noch

$$N(\cdot)\,\dot{x} = x + B(\cdot)\,u.$$

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Offensichtliche Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Inkonsistente Anfangsbedingungen möglich!

Das schnelle System

Im folgende betrachte nur noch

$$N(\cdot)\,\dot{x} = x + B(\cdot)\,u.$$

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Offensichtliche Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{u} \\ -u \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Differenzierbarkeit von u erforderlich!

Gliederung

Distributionen

$$\mathbb{D} := \{\ F : \Phi \to \mathbb{R} \ |\ F \text{ linear und stetig } \} = \Phi'$$

$$\Phi := \{\ \phi \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \ |\ \text{supp}\phi \text{ ist kompakt } \}$$

- Berühmtestes Beispiel: Dirac-Impuls $\delta : \phi \mapsto \phi(0)$.
- L^1_{loc} "$\subseteq$" $\mathbb{D}$: $\quad f_{\mathbb{D}}\{\phi\} = \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi(t)\mathrm{d}t$.
- $\mathbb{D}$ ist "C^∞": $\quad (\mathcal{D}F)\{\phi\} = -F\{\dot{\phi}\}$.
- $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $F \in \mathbb{D}$: $\quad (\alpha F)\{\phi\} = F\{\alpha\phi\}$

Distributionelle DAE

Für $X \in \mathbb{D}^n$ und $U \in \mathbb{D}^m$ betrachte

$$N(\cdot)\mathcal{D}X = X + B(\cdot)U. \tag{2}$$

Theorem

DAE (2) besitzt für jedes $U \in \mathbb{D}^m$ die eindeutige Lösung

$$X = -\sum_{i=0}^{n-1} (N\mathcal{D})^i BU.$$

Problem mit distributioneller Sicht

Problem

$X : \Phi \to \mathbb{R}^n$, was ist Anfangswert zur Zeit $t = 0$?

Stückweise stetige Distributionen

Für $M \subseteq \mathbb{R}$ sei $\Phi|_M := \{\ \phi \in \Phi \ |\ \operatorname{supp}\phi \subseteq M\ \}$.

Definition (Cobb 1984)

Für $i \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{D}_{\mathrm{pw}C^i} := \left\{ F \in \mathbb{D} \ \middle|\ \begin{array}{c} \exists g \in C^i_{\mathrm{pw}}(\mathbb{R},\mathbb{R})\, \exists T \subseteq \mathbb{R} \text{ diskret :} \\ F\big|_{\Phi|_{\mathbb{R}\setminus T}} = g_{\mathbb{D}}\big|_{\Phi|_{\mathbb{R}\setminus T}} \end{array} \right\}.$$

Beispiel

$\delta \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}C}$ mit $g \equiv 0$ und $T = \{0\}$.

Fakt

$$F \in \mathbb{D}_{pwC^{i+1}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}F \in \mathbb{D}_{pwC^i}$$

Stückweise stetige Distributionen als Lösung

Fakt

Für $u \in C_{pw}^{n-1}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ sei $X \in \mathbb{D}$ die eindeutig bestimmte Lösung von

$$N\mathcal{D}X = X + Bu_{\mathbb{D}}.$$

Dann ist $X \in \mathbb{D}_{pwC}$.

$\Rightarrow$ Auch Eingangssignale mit Sprüngen liefern nun Lösungen!

Definition

Für $X \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}C}$ mit zugehörigem $g \in C_{\mathrm{pw}}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ und $\tau \in \mathbb{R}$ ist

$$X(\tau+) := \lim_{t \to \tau+} g(t)$$
$$X(\tau-) := \lim_{t \to \tau-} g(t)$$

$\Rightarrow$ Der Begriff Anfangswert macht nun Sinn.

Gliederung

Lösung einer DAE

Erinnerung

Die distributionelle DAE

$$N\mathcal{D}X = X + Bu_{\mathbb{D}}$$

hat für $u \in C_{\text{pw}}^{n-1}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ die Lösung

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} (N\mathcal{D})^i Bu_{\mathbb{D}} \quad \in \mathbb{D}_{\text{pw}C}.$$

Bemerkung

Die Anfangswerte $X(0-)$ und $X(0+)$ sind durch das Eingangssignal u in der Umgebung von 0 eindeutig bestimmt.

Inkonsistente Anfangswerte

Problem

$X(0-)$ und $X(0+)$ liegen im Allgemeinen in einem echten Unterraum von $\mathbb{R}^n$!
Was soll ein Anfangswertproblem mit unzulässigem Anfangswert sein?

Einschränkungen stückweiser stetiger Distributionen

Definition (Cobb 1984)

Die Einschränkung einer Distribution $F \in C_{\text{pw}C}$ auf ein Intervall $[\tau, \infty)$ ist definiert durch

$$
\begin{aligned}
F_{[\tau,\infty)} &: \Phi \to \mathbb{R}, \\
\phi &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad \operatorname{supp}\phi \subseteq (-\infty, \tau], \\ F\{\phi\} - \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} g(s)\phi(s)\mathrm{d}s, & \text{falls} \quad \operatorname{supp}\phi \subseteq [\tau - \varepsilon, \infty), \end{cases}
\end{aligned}
$$

wobei $g \in C_{\text{pw}}$ so gewählt wurde, dass $F\big|_{\Phi|_{(\tau-\varepsilon,\tau)}} = g_{\mathbb{D}}\big|_{\Phi|_{(\tau-\varepsilon,\tau)}}$.

Fakt

$$F \in \mathbb{D}_{pwC^i} \quad \Rightarrow \quad F_{[\tau,\infty)} \in \mathbb{D}_{pwC^i}$$

Definition Lösung eines Anfangswertproblems

Betrachte

$$N\mathcal{D}X = X + BU. \tag{3}$$

Definition

$X \in \mathbb{D}_{pwC^1}$ ist Lösung des Anfangswertproblems (3), $X(0-) = x_0 \in \mathbb{R}^n$

$:\Longleftrightarrow$

- $X(0-) = x_0$ und
- $\exists U \in \mathbb{D}_{\mathrm{pw}C}^m$ mit X erfüllt die "abgeschnittene" DAE

$$(N\mathcal{D}X)_{[0,\infty)} = (X + BU)_{[0,\infty)}.$$

Keine eindeutige Lösung mehr

Mehrdeutigkeit der Lösung

Das Anfangswertproblem besitzt keine eindeutige Lösung $X \in \mathbb{D}^n$.

Charakterisierung der Lösung zu Anfangswertproblemen

Theorem

Für $U \in \mathbb{D}_{pwC}$ *mit* $U = U_{[0,\infty)}$ *gilt:*

$X \in \mathbb{D}_{pwC^1}$ *ist Lösung des Anfangswertproblems* $N\mathcal{D}X = X + BU$, $X(0-) = x_0 \in \mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow$

$X(0-) = x_0$ *und* $Z = X_{[0,\infty)}$ *ist Lösung von*

$$N\mathcal{D}Z = Z + BU_{[0,\infty)} + Nx_0\delta.$$

Zusammenfassung

- Es wurden klassische DAEs vorgestellt und welche Probleme auftreten können:
  - Keine klassische Lösung wegen inkonsistenten Anfangswerten
  - Keine klassische Lösung wegen nicht-glatten Eingangssignalen
- Als Ausweg wurden distributionelle DAEs betrachtet
  - Problem des Anfangswertes bei Distributionen allgemein
  - Einschränkung auf stückweise stetige Distributionen
- Anfangswertproblem für distributionelle DAEs:
  - Problem der inkonsistenten Anfangswerte bleibt bestehen
  - Neue Definition für Lösung eines Anfangswertproblems